Mathe 2

Corona - Notversion

M. Oettinger

30.04.2020

der Konvergenzradius

Wir betrachten eine Potenzreihe der allgemeinen Form

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

und setzen als Vereinfachung voraus, dass sich alle Koeffizienten a_n von Null unterscheiden

$$a_n \neq 0 \; \forall \; n \in \mathbb{N}_0$$

Soll die Reihe als Näherung für eine Funktion benutzt werden, muss sie natürlich konvergieren. Das Quotientenkriterium für eine allgemeine Reihe liefert Aussagen über Konvergenz/Divergenz von Reihen:

Satz: Quotientenkriterium (d'Alembert-Kriterium)

Die unendliche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ mit } b_n \neq 0 \; \forall \; n \in \mathbb{N}_0, b_n \in \mathbb{C}$$

konvergiert, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| < 1.$$

Die Reihe divergiert, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| > 1.$$

Setzt man für die Koeffizienten $b_n = a_n x^n$ (und damit $b_{n+1} = a_{n+1} x^{n+1}$), wird die unendliche Reihe zur Potenzreihe, sie konvergiert, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

$$\Rightarrow |x| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$r := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{1}$$

r heißt Konvergenzradius (oft auch Konvergenzbereich) der Reihe. Für $|x| < r$, also für x im Intervall $I =]-r; r[$ konvergiert die Potenzreihe.

Beispiel: geometrische Reihe

die unendliche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^{n+1} + \dots$$

ist eine Potenzreihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mit den Koeffizienten $a_n = 1 \; \forall \; n \in \mathbb{N}_0$. Ihr Konvergenzradius berechnet sich nach Gl. (1) wie folgt:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{1} \right| = 1.$$

Beispiel: geometrische Reihe

Man erhält das erwartete Ergebnis, die geometrische Reihe konvergiert für $|x| < r = 1$, sie divergiert für $|x| > r = 1$.

Das Quotientenkriterium sagt nichts über die Ränder des Intervalls $x = \pm 1$ aus

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = 1,$$

sie müssen stets gesondert untersucht werden (das ist in der Regel einfach).

der Konvergenzradius

Beispiel: geometrische Reihe

Für $+1$ ergibt sich für die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots \text{ divergent}$$

und für -1 ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \text{ divergent.}$$

Die geometrische Reihe

$$\sum_{n} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^{n+1} + \dots$$

konvergiert also tatsächlich nur für $|x| < 1$.

Taylorreihen

Ein Beispiel für den Zusammenhang zwischen Potenzreihen und Funktionen ist die geometrische Reihe, eine Potenzreihe

$$P(x) = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Sie konvergiert für $|x| < 1$, der Wert der Summe ist (bekannt) im Konvergenzbereich $\dfrac{1}{1-x}$. Folglich gilt für $-1 < x < 1$ die Beziehung

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Potenzreihe als Funktion

das bedeutet die Gleichheit zweier Darstellungen der Funktion $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Die gebrochenrationale Funktion $f(x)$ stimmt für alle x innerhalb des Konvergenzradius, also aus dem Intervall $I =]-1;1[$ mit

- $\dfrac{1}{1-x}$ und
- der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

überein, die Potenzreihe ist eine spezielle Darstellung der Funktion.

Gesucht ist ein Verfahren, mit dem Potenzreihen einer Funktion berechnet werden können.

Ist die Funktion f in x_0 differenzierbar, lässt sich ihre Kurve in der Nähe der Stelle x_0 grob durch die Tangente annähern. Beispielsweise gilt an der Stelle $x_0 = 0$:

$$f(x) \approx t(x) = a + bx \Rightarrow f(0) \approx a + 0$$
$$f'(x) \approx t'(x) = b \Rightarrow f'(0) \approx b$$
$$\Rightarrow \; t(x) = a + bx = f(0) + f'(0) \cdot x$$

Als einfaches Beispiel $f(x) = e^x$:

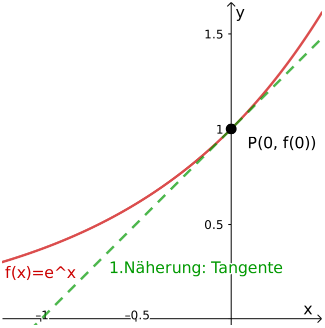

Abbildung: Näherung durch Tangente

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x = e^0 + e^0 x = 1 + x$$

Vermutlich kann die Näherung für den Kurvenverlauf mit höheren Ableitungen verbessert werden.
Um dies zu untersuchen, setzen wir ein Polynom höherer Ordnung als Näherung für $f(x)$ an:

$$f(x) \approx f(0)+bx+cx^2+dx^3 =: p(x).$$

$p(x)$ dient als Näherung für die Funktion f, seine Ableitungen sind also Näherungen für die Ableitungen $f^{(n)}$.

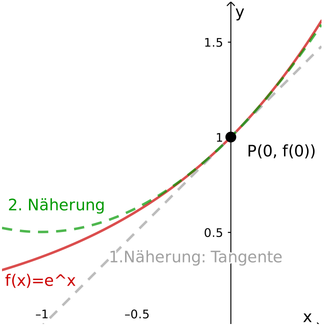

Abbildung: Näherung durch quadratische Funktion

Tayloreihen

Ableitungen des Polynoms $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$:

$$\begin{aligned} p'(x) &= b + 2cx + 3dx^2 \quad &&\Rightarrow p'(0) = b + 0 + 0 \approx f'(0) \\ p''(x) &= 2c + 3 \cdot 2 \cdot dx \quad &&\Rightarrow p''(0) = 2c \approx f''(0) \\ &\Rightarrow \; c \approx \frac{1}{2} f''(0) \end{aligned}$$

Also ist die Näherung durch eine quadratische Funktion

$$f(x) \approx f(0) + bx + cx^2 = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2$$

Tayloreihen

$$
\begin{aligned}
f(x) &\approx f(0) + bx + cx^2 + dx^3 \\
&= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 \\
p''(x) &= 2c + 3 \cdot 2 \cdot dx \\
p^{(3)}(x) &= 6d \\
&\Rightarrow d = \frac{1}{6} p^{(3)}(x) \approx \frac{1}{6} f^{(3)}(0)
\end{aligned}
$$

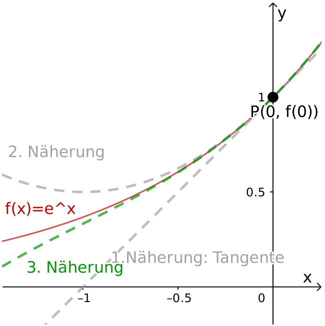

Abbildung: Näherung durch kubische Funktion

in die Näherung:

$$
\begin{aligned}
f(x) &\approx f(0) + bx + cx^2 + dx^3 \\
&= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \frac{1}{6} f^{(3)}(0)x^3
\end{aligned}
$$

Taylorreihen

Für weitere n erhält man Polynome immer höheren Grades und im Grenzwert für $n \to \infty$ schließlich eine Potenzreihe. Diese Potenzreihe wird als *Taylorreihe* bezeichnet. In vielen Fällen konvergiert die Taylorreihe, sie ist dann eine andere Darstellung der ursprünglichen Funktion.

Die Idee, Funktionen wie im Beispiel oben durch ein allgemeines Polynom anzunähern lässt sich formal verallgemeinern (Taylor-Entwicklung).

Mac Laurinsche Reihe

Für die Entwicklung einer Funktion $f(x)$ in eine Potenzreihe der Form

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots \tag{2}$$

sind zwei einfache Annahmen nötig:

i) Die Entwicklung der Funktion in die obige Form ist grundsätzlich möglich und eindeutig

ii) Die Funktion $f(x)$ ist in der Umgebung von $x = 0$ beliebig oft differenzierbar, die Ableitungen an der Stelle $x = 0$ $(f'(0), f''(0), f^{(3)}(0), \dots)$ sind bekannt (oder berechenbar).

Mac Laurinsche Reihe

Besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius r, so ist die Funktion für $|x| < r$ lediglich eine andere Darstellung der Potenzreihe $\Rightarrow$ für die Funktion und ihre Ableitungen muss gelten:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots \\
f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \ldots \\
f''(x) &= 2 \cdot 1 a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x + 3 \cdot 4 a_4 x^2 + 4 \cdot 5 a_5 x^3 + 5 \cdot 6 a_6 x^4 + \ldots \\
f^{(3)}(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 a_4 x + 3 \cdot 4 \cdot 5 a_5 x^2 + 4 \cdot 5 \cdot 6 a_6 x^3 + \ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Um die Koeffizienten a_k zu bestimmen, können die als bekannt vorausgesetzten Ableitungen an der Stelle $x = 0$ benutzt werden (die Summanden mit x verschwinden).

Mac Laurinsche Reihe

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 1 \cdot a_0 && = 0! \cdot a_0 \\
f'(0) &= 1 \cdot a_1 && = 1! \cdot a_1 \\
f''(0) &= 1 \cdot 2 \cdot a_2 && = 2! \cdot a_2 \\
f^{(3)}(0) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 && = 3! \cdot a_3 \\
f^{(4)}(0) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a_4 && = 4! \cdot a_4 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Betrachtet man die Funktion als nullte Ableitung, sind die Koeffizienten der Potenzreihe durch die Ableitungen der Funktion an der Stelle $x = 0$ eindeutig bestimmt durch

$$a_0 = \frac{f(0)}{0!}, a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, a_3 = \frac{f^{(3)}}{3!}, \ldots$$

Mac Laurinsche Reihe

Verallgemeinert sind die Koeffizienten a_n mit $n \in \mathbb{N}_0$ über die Ableitungen der Funktion f bestimmbar:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Damit sind die Koeffizienten bekannt, die Funktion kann in eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

entwickelt werden

Mac Laurinsche Reihe

Satz: Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe (Mac Laurinsche Reihe)

Unter bestimmten Bedingungen kann eine Funktion $f(x)$ in eine Potenzreihe der Form

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

mit der n-ten Ableitung an der Stelle $x_0 = 0$

$$f^{(n)}(0) = \left.\frac{d^n}{dx^n}f(x)\right|_{x=0}$$

(Mac Laurinsche Reihe) entwickelt werden.

Mac Laurinsche Reihe

- Die Mac Laurinsche Reihe ist die Potenzreihenentwicklung der Funktion $f(x)$ um die Stelle $x = 0$ (auch als *Entwicklungsstelle* bezeichnet). Sie ist ein Sonderfall der allgemeineren Potenzreihenentwicklung nach Taylor.
- Für die Entwicklung muss die Funktion $f(x)$ an der Entwicklungsstelle $x = 0$ *beliebig oft differenzierbar* sein. Diese Bedingung ist allerdings nicht hinreichend.
- Der Konvergenzradius der Mac Laurinschen Reihe von $f(x)$ kann nach Gl. (1) bestimmt werden. Innerhalb des Konvergenzradius wird die Funktion $f(x)$ eindeutig durch die Potenzreihe dargestellt.
- Die Symmetrieeigenschaften einer Funktion $f(x)$ spiegeln sich in der Mac Laurinschen Reihe wieder: in der Reihenentwicklung einer geraden (ungeraden) Funktion treten nur gerade (ungerade) Potenzen von x auf.

Beispiel: Mac Laurinsche Reihe von $f(x) = e^x$

die Exponentialfunktion ist sicher beliebig oft differenzierbar, es ist

$$f(x) = e^x \text{ und damit } f^{(n)}(x) = e^x \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Für die Reihenentwicklung um den Nullpunkt benötigen wir die Ableitungen an der Stelle $x = 0$:

$$f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Damit erhalten wir sofort die Potenzreihenentwicklung der e-Funktion

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Mac Laurinsche Reihe

Beispiel: Mac Laurinsche Reihe von $f(x) = e^x$

Ihr Konvergenzradius berechnet sich nach (1)

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} n = \infty,$$

Die Reihe konvergiert beständig.
Ersetzt man in der Reihenentwicklung formal die Variable x durch $-x$, so erhält man

$$e^{-x} = 1 + \frac{(-x)^1}{1!} + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \dots \quad = 1 - \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!}.$$

Sie konvergiert ebenfalls beständig.

Beispiel: Mac Laurinsche Reihe von $f(x) = \cos x$

es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x & &\Rightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) &= -\sin x & &\Rightarrow f'(0) = 0 \\ f''(x) &= -\cos x & &\Rightarrow f''(0) = -1 \\ f^{(3)}(x) &= \sin x & &\Rightarrow f^{(3)}(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) &= \cos x & &\Rightarrow f^{(4)}(0) = 1 \end{aligned}$$

Ab der vierten Ableitung wiederholen sich die Werte. Die Mac Laurinsche Reihe der Kosinusfunktion (wegen Spiegelsymmetrie sind alle Potenzen gerade!) ist

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Beispiel: Mac Laurinsche Reihe von $f(x) = \cos x$

Die Berechnung des Konvergenzradius ist hier komplizierter, da jeder zweite Koeffizient verschwindet. Durch Substitution der Variablen ($u = x^2$) erhält man aber

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{u^n}{(2n)!},$$

der Konvergenzradius ist

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot (2n+2)!}{(2n)! \cdot (-1)^{k+1}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} (2n+2)(2n+1) = \infty \end{aligned}$$

Mac Laurinsche Reihe

Beispiel: geometrische Reihe

Die geometrische Reihe ist eine Darstellung der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

und kann über die Mac Laurin-Entwicklung berechnet werden:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)^{-1} \\ f'(x) &= (-1)(1-x)^{-2} \cdot (-1) = (1-x)^{-2} \\ f''(x) &= (-2)(1-x)^{-3} \cdot (-1) = 2 \cdot 1 \cdot (1-x)^{-3} \\ f^{(3)}(x) &= (-3)2(1-x)^{-4} \cdot (-1) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (1-x)^{-4} \end{aligned}$$

Die n-te Ableitung scheint $f^{(n)}(x) = n! \cdot (1-x)^{-(n+1)}$ zu sein.

Beispiel: geometrische Reihe

Behauptung ist also $f^{(n)}(x) = n! \cdot (1-x)^{-(n+1)}$, sie kann über Induktion bewiesen werden:

1. Induktionsanfang mit $n_0 = 1$: bereits berechnet $f'(x) = 1! \cdot (1-x)^{-(1+1)}$
2. Induktionsschritt mit Voraussetzung $f^{(n)}(x) = n! \cdot (1-x)^{-(n+1)}$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left(n! \cdot (1-x)^{-(n+1)}\right)' \\ &= n!(-(n+1))(1-x)^{-(n+1)-1}(-1) \\ &= (n+1)n!(1-x)^{-(n+2)} \\ &= (n+1)!(1-x)^{-(n+2)} \end{aligned}$$

Beispiel: geometrische Reihe

Für die Mac Laurinsche Reihe werden die Ableitungen an der Stelle $x = 0$ benötigt:

$$f^{(n)}(0) = n! \cdot (1-0)^{-(n+1)} = n! \cdot 1 = n!$$

Damit ist die Reihe

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$= 1 + \frac{1!}{1!}x^1 + \frac{2!}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

die bekannte geometrische Reihe. Der Konvergenzradius $r = 1$ ist bereits berechnet.

In vielen Fällen ist die MacLaurin-Entwicklung einer Funktion $f(x)$ nicht möglich, z.B wenn die Funktion an der Stelle $x = 0$ nicht definiert ist

Beispiel:

wir versuchen die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ in eine Potenzreihe zu entwickeln. Die ersten Ableitungen sind

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} = x^{-1} = (-1)^0 \cdot 0! \cdot x^{-0-1} \\
f'(x) &= (-1)x^{-2} = (-1)^1 x^{-2} = (-1)^1 \cdot 1! \cdot x^{-1-1} \\
f''(x) &= (-1)(-2)x^{-3} = (-1)^2 \cdot 2x^{-3} = (-1)^2 \cdot 2! \cdot x^{-2-1)} \\
f^{(3)}(x) &= 1 \cdot 2 \cdot (-3)x^{-4} = (-1)^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^{-4} = (-1)^3 \cdot 3! \cdot x^{-3-1} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Taylor-Polynome und -Reihen

Beispiel:

Die Systematik ist erkennbar, verallgemeinert gilt offensichtlich für die n-te Ableitung von $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-n-1}.$$

Für die Entwicklung um die Stelle $x = 0$ werden die Ableitungen $f^{(n)}(0)$ benötigt, die in diesem Fall nicht definiert sind
$\Rightarrow$ die Mac Laurin-Entwicklung ist nicht möglich.

Um die Funktion trotzdem in eine Potenzreihe entwickeln zu können, drückt man sie in einer anderen Form aus.

Die Funktion $f(x)$ kann symbolisch als

$$f(x) = g(x - x_0) = g(h)$$

geschrieben werden. Die Entwicklung der unbekannten Funktion $g(h)$ nach ihrer Variablen h (um die Stelle $h = 0$) kann nun einfach angegeben werden:

$$\begin{aligned} g(h) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} h^n \qquad (3) \\ &= g(h=0) + \frac{g'(h=0)}{1!} h + \frac{g''(h=0)}{2!} h^2 + \frac{g^{(3)}(h=0)}{3!} h^3 + \ldots \end{aligned}$$

Nutzt man aus, dass

$$
\begin{aligned}
h = x - x_0 \quad &\Rightarrow \quad h = 0 \text{ für } x = x_0 \\
f(x) = g(x - x_0) &\Rightarrow g(h = 0) = f(x_0) \\
f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x - x_0) &\Rightarrow g^{(n)}(h = 0) = f^{(n)}(x_0)
\end{aligned}
$$

so kann Gleichung (3) umgeschrieben werden in

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,
\end{aligned}
$$

die allgemeine Form einer Taylorreihe. Da für die Entwicklung x_0 benutzt wird, bezeichnet man sie als eine Taylor-Entwicklung um die Stelle x_0.

Definition: Taylor-Entwicklung

Es sei $x_0 \in D$ und $f : D \longmapsto K$ sei in x_0 beliebig oft differenzierbar. Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \tag{4}$$

die Taylorreihe der Funktion $f(x)$ mit Entwicklungsstelle x_0.

Die Reihe ist hier zunächst formal zu verstehen, die Konvergenz der Reihe ist nicht vorausgesetzt.

Beispiel: Taylorentwicklung

zurück zum Beispiel oben - über die Taylor-Entwicklung kann auch die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ in eine Potenzreihe entwickelt werden.

Wählt man als Entwicklungspunkt $x_0 = 1$, ergibt sich mit den Ableitungen oben

$$f^{(n)}(x_0) = (-1)^n \cdot n! \cdot x_0^{-n-1} = (-1)^n \cdot n! \cdot 1^{-n-1} = (-1)^n \cdot n!$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n!}{n!}(x-1)^n$$

$$f(x) = \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n.$$

Beispiel: Taylorentwicklung

Der Konvergenzradius der Reihe ist

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} |(-1)| = 1.$$

Die Reihe konvergiert also für $|x - x_0| = |x - 1| < r = 1$ bzw. im Bereich $0 < x < 2$:

$$f(x) = \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n \; ; \;\; 0 < x < 2$$

Beispiel: Entwicklung von $\ln(x)$

Ganz analog lässt sich eine Reihe für den natürlichen Logarithmus $f(x) = \ln(x)$; $x > 0$ über eine Entwicklung um die Stelle $x_0 = 1$ berechnen. Die Funktion und ihre erste Ableitung lauten

$$f(x) = \ln(x) \qquad \Rightarrow f(1) = \ln(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f'(1) = 1,$$

ab hier können die oben gefundenen Ableitungen direkt benutzt werden (n wird einfach um eins hochgezählt!)

Beispiel: Entwicklung von $\ln(x)$

$$f''(x) = (-1)x^{-2} = (-1)^1 x^{-2} = (-1)^1 \cdot (2-1)! \cdot x^{-2}$$

$$\Rightarrow f''(1) = (-1)^1 \cdot (2-1)!$$

$$f^{(3)}(x) = (-1)(-2)x^{-3} = (-1)^2 \cdot 2x^{-3} = (-1)^2 \cdot (3-1)! \cdot x^{-3}$$

$$\Rightarrow f^{(3)}(1) = (-1)^2 \cdot (3-1)!$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)! \cdot x^{-n}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$$

Beispiel: Entwicklung von ln(x)

Damit lautet die Reihe für den $\ln(x)$

$$f(x) = \ln(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

Ihr Konvergenzradius ist

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{(-1)^n \cdot n} \right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1.$$

Die Reihe konvergiert ebenfalls für $0 < x < 2$.

Definition: Taylorpolynom

Es sei $x_0 \in D$ und $f : D \longmapsto K$ sei n-mal differenzierbar. Dann heißt

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \tag{5}$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

das n-te Taylorpolynom zur Funktion f in x_0.

Setzt man $n = 1$, so erhält man die Tangentengleichung als lineare Näherung

$$f(x) \approx T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

Beispiel:

Das 2. Taylorpolynom der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ in $x_0 = 2$ mit $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ und $f''(x) = 2 \cdot \frac{1}{x^3}$ ist

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{1}{2} f''(2)(x-2)^2 \\ &= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right)(x-2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(x-2)^2 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}(x^2 - 4x + 4) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}x^2 \end{aligned}$$

Beispiel:

Man sieht sofort, dass damit tatsächlich gilt:

$$T_2(2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = f(2)$$
$$T_2'(2) = -\frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 2 = -\frac{1}{4} = f'(2)$$
$$T_2''(2) = \frac{1}{4} = f''(2)$$

Die Näherung ist offensichtlich nahe der Entwicklungsstelle gut!

Taylor-Polynome und -Reihen

Beispiel:

Die Funktion $f(x) = e^x$:
die n-te Ableitung ist hier $f^{(n)} = e^x$ mit der Eigenschaft $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$.
Damit vereinfacht sich die Taylorreihe um $x_0 = 0$ zu

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(Zur Erinnerung: $0! := 1$).

Die bereits bekannte Potenzreihen-Darstellung einer Funktion entspricht der Taylorreihe um die Stelle $x_0 = 0$ (Mac Laurinsche Reihe) zu f. Das n-te Taylorpolynom in $x_0 = 0$ entspricht einer nach $n + 1$ Gliedern (nach x^n) abgeschnittenen Potenzreihe.