Mathe 2

Corona - Notversion

M. Oettinger

07.05.2020

Taylor-Polynome und -Reihen

Definition: Taylor-Entwicklung

Es sei $x_0 \in D$ und $f : D \longmapsto K$ sei in x_0 beliebig oft differenzierbar. Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots +$$

die Taylorreihe der Funktion $f(x)$ mit Entwicklungsstelle x_0.

Die Taylorreihe ist innerhalb des Konvergenzradius r eine spezielle Darstellung der Funktion $f(x)$.

Definition: Taylorpolynom

Es sei $x_0 \in D$ und $f : D \longmapsto K$ sei n-mal differenzierbar. Dann heißt

$$
\begin{aligned}
T_n(x) &:= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k && (1)\\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots && (2)\\
&+ \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n
\end{aligned}
$$

das n-te Taylorpolynom zur Funktion f in x_0.

Taylorpolynome werden oft als Näherungen für Funktionen benutzt. Die Näherung ist in der Umgebung der Entwicklungsstelle x_0 relativ gut.

Satz:

Sei $f :]a,b[\longmapsto \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar, $x_0 \in]a,b[$ und $T_n(x)$ das n-te Taylorpolynom zu f in x_0.

Dann gibt es zu jedem $x \in]a,b[$ ein θ zwischen x_0 und x mit

$$f(x) = T_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{Restglied}.$$

Der Satz liefert eine Möglichkeit, die Qualität der Näherung über ein Taylorpolynom abzuschätzen.

Restgliedabschätzung

Stellt man den Ausdruck

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

um, so ergibt sich

$$|f(x) - T_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \tag{3}$$

für ein θ zwischen x_0 und x. Man erhält damit eine Abschätzung, wie groß die maximale Abweichung des Taylorpolynoms von der dargestellten Funktion $f(x)$ für ein gegebenes x ist.

Restgliedabschätzung

Beispiel:

Für das im vorigen Beispiel mit $f(x) = \frac{1}{x}$ bestimmte Taylorpolynom um die Stelle $x_0 = 2$

$$T_2(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}x^2$$

lässt sich die Qualität der Näherung für x aus dem Intervall $[1,5; 2,5]$ folgendermaßen abschätzen:
Nach (3) gibt es für alle $x \in [1,5; 2,5]$ ein θ zwischen 2 und x mit der Eigenschaft

$$|f(x) - T_2(x)| = \left| \frac{f^{(3)}(\theta)}{3!}(x-2)^3 \right| .$$

Restgliedabschätzung

Beispiel:

Es wird also die dritte Ableitung $f^{(3)} = -6 \cdot \frac{1}{x^4}$ benötigt. Eingesetzt ergibt sich

$$|f(x) - T_2(x)| = \left| -6 \cdot \frac{1}{\theta^4} \frac{1}{3!} (x-2)^3 \right| .$$

Da die Größe θ^4 im Nenner steht, wird der Ausdruck für das kleinste θ maximal, wir können also sicher schreiben

$$|f(x) - T_2(x)| = \left| -6 \cdot \frac{1}{\theta^4} \frac{1}{3!} (x-2)^3 \right| \leq \frac{1}{1,5^4} (0,5)^3 \approx 0,025$$

Beispiel:

Taylorpolynom $T_n(x)$ für $n = 1, 2$ und 3 der Funktion

$$f(x) = e^{\cos x} \text{ um } x_0 = 0$$

Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^{\cos x} \cdot (-\sin x) \qquad\qquad \Rightarrow f'(0) = 0 \\
f''(x) &= e^{\cos x}(-\sin x)(-\sin x) + (-\cos x)e^{\cos x} \\
&= e^{\cos x}(\sin^2 x - \cos x) \\
&\Rightarrow f''(0) = e^1(0-1) = -e \\
f^{(3)}(x) &= e^{\cos x}(-\sin(x))(\sin x - \cos x) + e^{\cos x}(2\sin x \cdot \cos x - (-\sin x)) \\
&= e^{\cos x}\left(3\sin x \cos x - \sin^3 x + \sin x\right) \\
&\Rightarrow f^{(3)}(0) = 0
\end{aligned}$$

Beispiel:

Es folgt also

$$T_1(x) = e;\ T_2(x) = T_3(x) = e - \frac{1}{2}ex^2$$

Der maximale Fehler bei der Approximation wird durch das Restglied beschrieben:

$$|f(x) - T_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right|.$$

Bei der benutzten MacLaurin-Entwicklung vereinfacht sich der Ausdruck $(x - x_0)$ zu einem einfachen x.

Beispiel:

Für den vorliegenden Fall vereinfacht sich der Ausdruck $(x - x_0)$ zu x, es ergibt sich für die das erste Taylorpolynom mit $n = 1$:

$$|f(x) - T_1(x)| = \left| \frac{e^{\cos\theta}(\sin^2\theta - \cos\theta)}{2} \cdot x^2 \right| \leq \frac{e}{2} \cdot x^2$$

und für das zweite Taylorpolynom mit $n = 2$:

$$|f(x) - T_2(x)| = \left| \frac{f^{(3)}(\theta)}{3!} x^3 \right| \leq \frac{e}{3} |x^3|$$

Anwendungen

Eine häufige Anwendung der Taylor- oder MacLaurin-Entwicklung ist die näherungsweise Berechnung von Wurzeln.

Beispiel: Entwicklung einer Wurzel

gesucht ist der Wert $\sqrt[3]{1,1}$, er lässt sich recht einfach durch die ersten zwei Glieder einer Entwicklung der Funktion

$$f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$$

um die Stelle $x_0 = 0$ abschätzen. Benötigt werden der Wert der Funktion sowie der Wert der ersten Ableitung an der Stelle x_0

$$f(0) = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \frac{1}{3}$$

Anwendungen

Beispiel: Entwicklung einer Wurzel

Die Näherung ist das Taylorpolynom $T_1(x)$

$$T_1(x) = \frac{1}{0!}f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x$$
$$= 1 + \frac{1}{3}x \approx f(x)$$

Der Wert der Wurzel ist also etwa $f(0,1) = 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,1 = 1,0333\ldots$. Zum Vergleich: der Taschenrechner liefert $\sqrt[3]{1,1} = 1,032280\ldots$.

Beispiel: Drittel

Es ist $1 : 3 = \frac{1}{3} = 0,\bar{3} = 0,3333333\dots$. Gleichzeitig gilt natürlich, dass $1 = 3 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot 0,\bar{3} = 0,\bar{9}$. Also ist offensichtlich $0,\bar{9} = 0,999999\dots \equiv 1$.

Die Gleichung sieht auf den ersten Blich eigenartig aus, sie ist aber völlig korrekt und kann über eine Taylorentwicklung einfach gezeigt werden:

$$\begin{aligned} 0,\bar{9} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 9 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} \\ &= 9\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} - 1\right) \text{ zusätzlicher Summand wg. } k = 0, \end{aligned}$$

Anwendungen

Beispiel: Drittel

bei der Summe handelt es sich um die geometrischen Reihe, die gegen den Wert

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \text{ konvergiert, da } |q| < 1.$$

$$\Rightarrow 0,\bar{9} = 9\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right) = 9\left(\frac{1}{\frac{9}{10}} - 1\right)$$

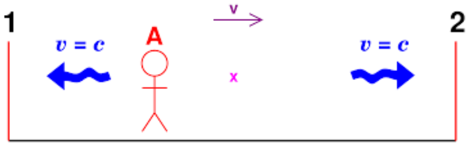
$$= 9\left(\frac{10}{9} - \frac{9}{9}\right) = \frac{9}{9} = 1.$$

Relativität

Bewegen sich zwei Inertialsysteme gleichförmig, kann nicht unterschieden werden, ob bzw. welches der Systeme sich bewegt. Die Tatsache hat einige besondere Auswirkungen (wir machen einen Ausflug in die einfache SRT, Spezielle Relativitätstheorie). Das wichtigste Postulat der Relativität ist die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum:

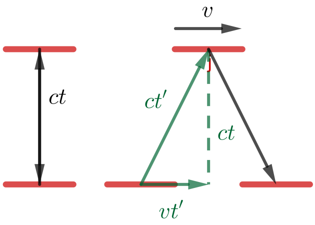
$$c = \text{ const, unabhängig vom Bezugssystem}$$

Das bedeutet: ein ruhender Beobachter (Bob) misst die Lichtgeschwindigkeit c, wenn ihn ein Lichtstrahl trifft. Wenn sich eine Beobachterin (Alice) relativ zu Bob bewegt (mit v), misst sie für denselben Lichtstrahl ebenfalls die Geschwindigkeit c (unabhängig von der Bewegungsrichtung).

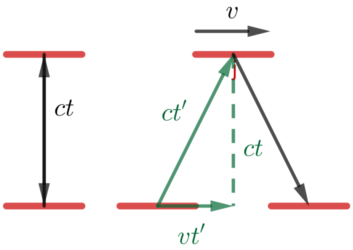


Stellt man sich einen Lichtblitz vor, der zwischen zwei Punkten (z.B. Spiegeln) hin- und herläuft und für die Strecke zwischen den Spiegeln die Zeit t benötigt, hat man eine einfache Lichtuhr konstruiert - die Zeit kann durch Abzählen der Wiederholungen gemessen werden. Da c konstant ist, ist die Uhr sogar sehr genau. Der Abstand zwischen den Spiegeln kann über die Zeit t ausgedrückt werden:

$$c = \frac{s}{t} \;\Rightarrow\; s = c \cdot t$$



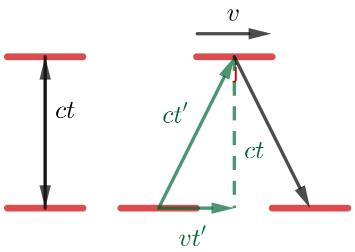
Bewegt sich die Uhr mit der Geschwindigkeit $v < c$ senkrecht zur Laufrichtung des Lichts, muss der Lichtblitz eine längere Strecke s' zurücklegen.



Da die Lichtgeschwindigkeit aber konstant ist, muss für die Strecke

$$s' = ct' > s = ct$$

gelten. Stellt man sich vor, dass Alice auf der ruhenden Uhr steht, so sieht sie den Lichtblitz der bewegten Uhr 'langsamer' ticken. Sitzt Bob auf der bewegten Uhr, entfernt sich die Uhr mit Alice von ihm - für Bob geht die linke Uhr langsamer!



In der Zeit t', die der Lichtstrahl in der bewegten Uhr benötigt, um von unten nach oben zu laufen, bewegt sich die Uhr um vt' nach rechts, also gilt für die Strecken in der Grafik

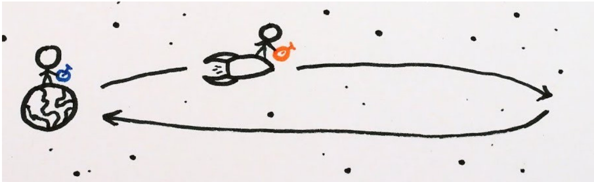
$$(ct')^2 = (vt')^2 + (ct)^2$$

oder

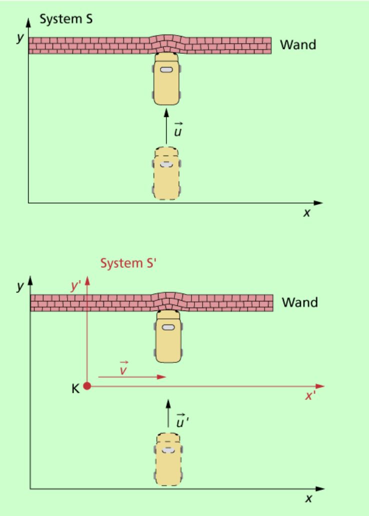
$$(ct)^2 = (ct')^2 - (vt')^2 = c^2 t'^2 (1 - \frac{v^2}{c^2})$$

$$ct = ct' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \Leftrightarrow \quad t = t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

t' ist größer als t - die Zeit im bewegten System läuft (relativ zum ruhenden System) langsamer!



Nehmen wir an, dass Alice eine Wunderrakete hat (mit AMG - Triebwerken und pinkfarbenen Rennstreifen), die ohne zu beschleunigen beinahe c erreicht. Fliegt Alice fünf Jahre ins All und legt (ohne Beschleunigung!) den Rückweg in fünf Jahren zurück, ist sie um 10 Jahre gealtert - auf der Erde sind aber bis zu ihrer Rückkehr 20 Jahre vergangen. Alice ist in die Zukunft gereist.



Ein Körper der Masse m stößt unelastisch gegen eine Wand. Aus Sicht des mit der Mauer verbundenen ruhenden Systems S hinterlässt m eine Wirkung, die Ursache dafür ist der Impuls $p = mv$. Aus Sicht des Systems S', das sich mit hoher Geschwindigkeit in x-Richtung bewegt, tritt die gleiche Wirkung auf, die nur durch den gleich großen Impuls $p' = m'v'$ hervorgerufen werden kann. Wegen der Zeitdilatation muss der Vorgang aber für einen Beobachter in S' langsamer verlaufen.

Die gleiche Wirkung ist nur möglich, wenn die Masse des Körpers im System S' größer ist.

Die Strecke bis zur Wand ist wieder dieselbe, ist die Geschwindigkeit zwischen S und S' aber groß genug, ändert sich die Zeit im bewegten System:

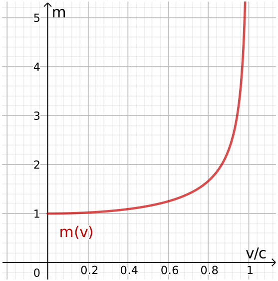
$$v' = \frac{s}{t'} = \frac{s\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{t} = v \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Dabei bleibt die Wirkung (und damit der Impuls p) aber gleich, also

$$p = mv = m'v' = m'v \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$m = m'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$



Beispiel: Energie einer bewegten Masse

Ein Körper mit einer Ruhemasse m_0 verändert nach der speziellen Relativitätstheorie seine Masse, sobald er sich mit der Geschwindigkeit v relativ zu einem Beobachter bewegt. Die Masse nimmt bei einer gleichförmigen Bewegung (ohne Beschleunigung) zu:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Es handelt sich wieder um eine Wurzelfunktion, die sich recht einfach entwickeln lässt:

$$m(v) = m_0 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = m_0 \cdot f(v)$$

Beispiel: Energie einer bewegten Masse

Entwicklung der Funktion $f(v)$ nach der Variablen v um die Stelle $v_0 = 0$:

$$f(0) = 1$$

$$f'(v) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{2v}{c^2}\right) = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{v}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(v) = \left(-\frac{3}{2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{5}{2}}\left(-\frac{2v}{c^2}\right)\left(\frac{v}{c^2}\right) + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{c^2}$$

$$\Rightarrow f''(0) = 0 + \frac{1}{c^2}$$

Damit kennen wir die ersten drei Glieder der Entwicklung und können eine Näherung für die Masse in Bewegung angeben:

Beispiel: Energie einer bewegten Masse

$$
\begin{aligned}
m(v) &\approx m_0 \left(\frac{1}{0!} f(0) v^0 + \frac{1}{1!} f'(0) v^1 + \frac{1}{2!} f''(0) v^2 \right) \\
&= m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right)
\end{aligned}
$$

Die Masse $m(v)$ in den bekannten Ausdruck

$$E = mc^2$$

(die relativistische Energie) eingesetzt liefert sofort

$$E = m(v)c^2 \approx m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) c^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Beispiel: Energie einer bewegten Masse

$$E = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 = E(v = 0) + E_{\text{kin}} \; .$$

Durch die Taylor-Näherung ergibt sich direkt die kinetische Energie E_{kin} als relativistische Korrektur der Masse für kleine Geschwindigkeiten ($v << c$).

Die Bewegungsenergie versteckt sich in der Masse eines bewegten Körpers.