Mathematik I
Übungsblatt 1: Lösungen

Aufgabe 1

$$\text{Behauptung:} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2; \quad n \in \mathbb{N}$$

Beweis über vollständige Induktion:

i) Induktionsanfang mit $n_0 = 1$:

$$1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$$

ii) Induktionsschritt mit der Voraussetzung $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1)}{4} = \frac{(n+1)^2 + n^2 + 2 \cdot 2n + 2^2}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{2^2} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a)

$$y = \sqrt{x}; \quad x \in \mathbb{R}$$

ist keine Funktion (keine eindeutige Zuordnung)

b)

$$x + \sqrt{y} = 0 \quad \Leftrightarrow y = x^2$$

ist für alle $x \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Zuordnung und damit Funktion.

c)

$$\frac{x}{|2x^3|}; \quad x \in \mathbb{R}$$

Mit dem Betrag im Nenner ergeben sich zwei Fälle:

i) Für $x > 0$:

$$\frac{x}{|2x^3|} = \frac{x}{2x^3} = \frac{1}{2x^2}$$

ii) Für $x < 0$:

$$\frac{x}{|2x^3|} = -\frac{x}{2x^3} = -\frac{1}{2x^2}$$

An der Stelle $x = 0$ ist kein Funktionswert definiert, keine Funktion.

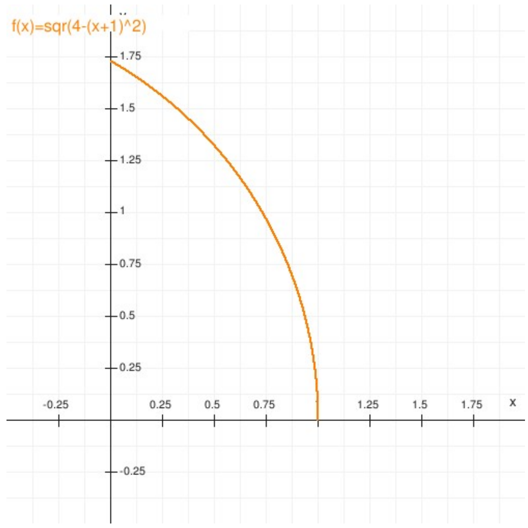
Aufgabe 3

$$(x+1)^2 + y^2 - 4 = 0; \quad y \geq 0; x > 0$$

ist ein Teil eines Kreisbogens mit Radius $r = 2$ und Zentrum bei $(-1; 0)$. Der Definitionsbereich D kann für y=0 einfach bestimmt werden:

$$(x+1)^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \pm 2$$

mit $x > 0$ ist der Definitionsbereich $D =]0; 1]$. Analog ist für $x = 0$ und $y \geq 0$ der Wertebereich $W = [0; \sqrt{3}[$.



Die Funktion hat eine Nullstelle bei $x = 1$, denn

$$y = \sqrt{4-(x+1)^2} = 0 \quad \Rightarrow x+1 = \pm 2; x > 0,$$

sie ist streng monton fallend und hat am Rand ihres Definitionsbereichs ein globales Maximum bei $x = 0$ und ein globales Minimum bei $x = 1$. Es gilt

$$f(-x) = \sqrt{4-(-x+1)^2} = \sqrt{4-(x-1)^2},$$

also $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$, die Funktion ist nicht symmetrisch.