Musterlösungen Mathematik III

1. Integration

(a)

$$\int_0^{2\pi} e^x \sin(x) dx$$

Partielle Integration mit $u' = e^x \implies u = e^x$ und $v = \sin(x) \implies v' = \cos(x)$:

$$\int_0^{2\pi} e^x \sin(x) dx = [e^x \sin(x)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^x \cos(x) dx$$

Das Integral auf der rechten Seite wird ebenfalls partiell integriert ($u' = e^x \implies u = e^x$ und $v = \cos(x) \implies v' = -\sin(x)$):

$$\int_0^{2\pi} e^x \cos(x) dx = [e^x \cos(x)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} e^x \sin(x) dx$$

eingesetzt ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} e^x \sin(x) dx = [e^x \sin(x)]_0^{2\pi} - [e^x \cos(x)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^x \sin(x) dx$$

$$2 \cdot \int_0^{2\pi} e^x \sin(x) dx = [e^x \sin(x) - e^x \cos(x)]_0^{2\pi}$$

$$\int_0^{2\pi} e^x \sin(x) dx = \frac{1}{2} [e^x(\sin(x) - \cos(x))]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} e^{2\pi}(0-1) - \frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{2\pi}\right)$$

(b)

$$\int_0^2 \left(\sqrt{5-2y}\right)^{-3} dy$$

Lösung durch Substitution $u = 5 - 2y \Longrightarrow du = -2dy$:

$$\int_0^2 \left(\sqrt{5-2y}\right)^{-3} dy = \int_a^b u^{-\frac{3}{2}} \cdot (-\frac{1}{2})du = -\frac{1}{2}\left[u^{\frac{5}{2}}\right]_a^b$$

(es werden wieder die Originalgrenzen verwendet). Rücksubstitution liefert

$$-\frac{1}{5}\left[(5-2y)^{\frac{5}{2}}\right]_0^2 = -\frac{1}{5}\left(1 - 5^{\frac{5}{2}}\right)$$

2. Doppelintegrale

(a)

$$\iint\limits_{(A)} (3x + 4y^2)dxdy(A) : y \geq 0; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4.$$

$R^2 = x^2 + y^2$ beschreibt einen Kreis in der x, y-Ebene. Berechnung des Integrals erfolgt in Polarkoordinaten durch Integration über φ in Grenzen von 0 bis π und r von 1 bis 2. $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ und $dA = rdrd\varphi$, also

$$\iint\limits_{(A)} (3x + 4y^2)dxdy = \iint\limits_{(A)} (3r\cos\varphi + 4(r\sin\varphi)^2 rdrd\varphi$$

$$= \int_0^\pi \int_1^2 3r^2 \cos\varphi drd\varphi + \int_0^\pi \int_1^2 4r^3 \sin^2\varphi drd\varphi$$

$$= \int_0^\pi \left[r^3\right]_1^2 \cos\varphi d\varphi + \int_0^\pi \left[r^4\right]_1^2 \sin^2\varphi d\varphi = 7\int_0^\pi \varphi d\varphi + 15\int_0^\pi \sin^2\varphi d\varphi$$

3. Differentialgleichung

(a)

$$\frac{du(t)}{dt} = -(u(t))^2 + u(t) + 2u(t)t^2 + 2t - t^2 - t^4$$

$u(t) = 1 + t^2$ eingesetzt:

$$\frac{du(t)}{dt} = -(1-t^2)^2 + 1 + t^2 + 2(1+t^2)t^2 + 2t - t^2 - t^4$$
$$-1 + 1 - 2t^2 + t^2 + 2t^2 - t^2 - t^4 + 2t^4 - t^4 + 2t = 2t$$

$u(t) = 1 + t^2$ abgeleitet:

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(1+t^2) = 2t$$

4. Differentialgleichungen

(a) $y' = x + 1$, Anfangsbedingung $y(-2) = -1$:
Trennung der Variablen

$$\frac{dy}{dx} = x + 1 \Longrightarrow dy = (x+1)dx$$

Integration liefert die allgemeine Lösung der DGL:

$$\int dy = \int (x+1)dx \Longrightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + x + C.$$

Bestimmung der Konstanten C aus der Anfangsbedingung $y(-2) = -1$:

$$y(-2) = \underbrace{\frac{1}{2}(-2)^2 - 2}_{=0} + C = -1 \Longrightarrow C = -1$$

Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y = \frac{1}{2}x^2 + x - 1.$$

FIXME Plot der Fkt!!

(b) $y' = 0,5(3-y)$, Anfangsbedingung $y(0) = 2$ Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3-y) \Longrightarrow \frac{dy}{y-3} = -\frac{1}{2}dx.$$

Lösung der allgemeinen DGL:

$$\int \frac{dy}{y-3} = -\frac{1}{2}\int dx \Longrightarrow \ln \mid y-3 \mid = -\frac{x}{2} + \ln \mid C \mid$$

$$y - 3 = C \cdot e^{\frac{x}{2}} \Longrightarrow y = 3 + C \cdot e^{\frac{x}{2}}.$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(0) = 3 + C \cdot e^{\frac{0}{2}} = 2 \Longrightarrow C = -1$$

$$y(x) = 3 - C \cdot e^{\frac{0}{2}}$$

(c) $y(1-x^2)y' - x(1-y^2) = 0$ Trennung der Variablen:

$$\frac{ydy}{1-y^2} = \frac{xdx}{1-x^2}$$

Substitution vereinfacht die Integrale: $u = 1 - y^2, du = -2ydy$ und $v = 1 - x^2, dv = -2xdx$, also

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dv}{v} \Longrightarrow \ln \mid u \mid = ln \mid v \mid + \ln \mid C \mid.$$

Rücksubstitution liefert

$$\ln \mid 1 - y^2 \mid = ln \mid 1 - x^2 \mid + \ln \mid C \mid \Longrightarrow 1 - y^2 = 1 - x^2 + C$$

$$\Longrightarrow y^2 = 1 - C(1 - x^2)$$

(d) $(x^2 - 1)y' = 2y$ Trennung der Variablen:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x^2 - 1}$$

Integration durch Partialbruchzerlegung: Nullstellen des Nenners sind $x_1 = 1, x_2 = -1$.

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

$$\ln \mid y \mid = \ln \mid x - 1 \mid - \ln \mid x + 1 \mid + \ln \mid C \mid = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \ln \mid C \mid$$

$$\Longrightarrow y = C \cdot \frac{x-1}{x+1}$$

5. Fourierzerlegung

Die Fourier-Reihe ist mit der Funktion identisch

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

für die 2π-periodische Funktion

$$f(x) = 3,74 + 1,5 \cdot \sin(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + ...$$

Bei Koeffizientenvergleich bleiben lediglich zwei Fourierkoeffizienten, die nicht verschwinden:

$$\frac{a_0}{2} = 3,74 \Longrightarrow a_0 = 7,48$$

$$b_1 \sin(x) = 1,5 \cdot \sin(x) \Longrightarrow b_1 = 1,5$$

6. Luft...

a) Der Ballon wird durch die Gravitation nach unten beschleunigt:

$$F_G = m \cdot g = m \cdot \dot{v}(t),$$

die Reibungskraft wirkt dagegen

$$F_R = -k \cdot v(t).$$

Man erhält die Differentialgleichung, indem die Summe der Kräfte gebildet wird:

$$m \cdot \dot{v}(t) = F_G + F_R = m \cdot g - k \cdot v(t) = 0$$

$$\dot{v}(t) + \frac{k}{m} \cdot v(t) = g,$$

es handelt sich um eine lineare, inhomogene DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

b) Lösung über die zugehörige homogene DGL

$$\dot{v_0}(t) + \frac{k}{m}v(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad v(t) = C \cdot e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Die Störfunktion $f(t) = g$ ist konstant, wir wählen als Ansatz eine Konstante

$$v_p(t) = A \quad \Rightarrow \dot{v_p}(t) = 0.$$

Einsetzen liefert die partikuläre Lösung $v_p(t)$:

$$\dot{v_p}(t) + \frac{k}{m}v_p(t) = 0 + \frac{k}{m}A = g = 0 \quad \Rightarrow A = v_p(t) = \frac{gm}{k}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist die Summe der beiden gefundenen Funktionen

$$v(t) = v_0(t) + v_p(t) = C \cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{gm}{k}$$

c) Für den Parameter $\frac{k}{m} = 8$1/s folgt

$$v(t) = C \cdot e^{8t/s} + \frac{g}{8}\frac{m}{s}.$$

Für große Zeiten ($t \to \infty$) verschwindet der exponentielle Term, also ist die Endgeschwindigkeit

$$v_e = \frac{g}{8}\frac{m}{s} \approx 1,25m/s.$$

7. Ein Anfangswertproblem

a) Es liegt eine Differentialgleichung 1.Ordnung mit einer Randbedingung vor $\Rightarrow$ es gibt genau eine Lösung.

b) Lineare, inhomogene DGL 1. Ordnung:

$$y' + \tan(x)y = 5\sin(2x)$$

$y_0' + \tan(x)y_0 = 0$ (zugehörige homogene DGL)

$$\Rightarrow \quad y_0(x) = C \cdot e^{-\int \tan(x)dx} = C \cdot e^{-(-\ln|\cos(x)|)} = C \cdot \cos(x).$$

Die inhomogene DGL wird über Variation der Konstanten gelöst:

$$\begin{aligned} y(x) &= C(x)\cos(x) \\ y'(x) &= C'(x)\cos(x) - C(x)\sin(x) \\ y' + \tan(x)y &= C'(x)\cos(x) - C(x)\sin(x) + \tan(x)C(x)\sin(x) = 5\sin(2x) \end{aligned}$$

$$C'(x)\cos(x) = 5\sin(2x)$$

Ausnutzen des Additionstheorems $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x)$ liefert sofort

$$\begin{aligned} C'(x)\cos(x) &= 5\sin(x+x) = 5 \cdot 2\sin(x)\cos(x) \\ C'(x) &= 10\sin(x) \\ C(x) &= 10\int \sin(x)dx = 10 \cdot (-\cos(x) + K) \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet

$$y(x) = 10(K + \cos(x)) \cdot \cos(x).$$

Für die Lösung des Anfangswertproblems fehlt noch die Bestimmung der Konstanten über die Gleichung $y(3\pi) = 2$:

$$\begin{aligned} y(3\pi) &= 10(K + \cos(3\pi))\cos(3\pi) = 2 \\ 10(K + (-1)) \cdot (-1) &= 2 \\ K &= \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \\ y(x) &= 10\left(\frac{4}{5} + \cos(x)\right) \cdot \cos(x) \end{aligned}$$