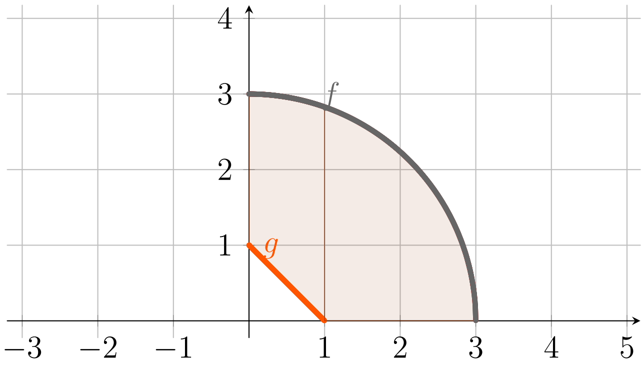
Mathematik III: Lösungen zum Übungsblatt 3

Dr. M. Oettinger

Stammfunktion, Integrationsverfahren

1. Doppelintegral des Viertelkreises (in Polarkoordinaten, weil es sich um einen Bereich mit Rotationssymmetrie handelt):



$$A_\circ = \iint\limits_{(A_\circ)} dA; \qquad y \geq 0;\ x \geq 0;\ 0 \leq x^2 + y^2 < 9.$$

$$\iint\limits_{(A_\circ)} dA = \int\limits_{r=0}^{3} \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} r dr d\varphi = \int\limits_{r=0}^{3} \frac{\pi}{2} r dr = \frac{\pi}{2} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^3 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{9}{2}$$

Die Fläche unter $g(x)$ kann ebenfalls über ein Doppelintegral berechnet werden (hier sind kartesische Koordinaten praktischer:

$$A_\Delta = \iint\limits_{(A_\Delta)} dA$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{-x+1} dx dy = \int_0^1 [y]_0^{-x+1} dx = \int_0^1 -x + 1 dx = \left[-\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

Einfacher ist die geometrische Begründung: das Dreieck unter $g(x)$ hat die halbe Fläche des Quadrats mit Seitenlänge 1.

Die gesuchte Fläche ist

$$A_\circ - A_\Delta = \frac{9\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{9\pi - 2}{4}$$

2. Bestimmung der Fourier-Koeffizienten für die 2π-periodische Sägezahnfunktion

$$f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x) \text{ für } 0 \leq x < 2\pi$$

mit periodischer Fortsetzung (11 Punkte):
Die Funktion ist ungerade ($f(-x) = -f(x)$), die Berechnung der b_n genügt.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{2} \sin(nx) dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cdot \sin(nx) dx \\
&= \frac{1}{\pi} 0 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \cdot \sin(nx) dx = -\frac{1}{2\pi} \left(\left[x \left(-\frac{1}{n} \cos(nx) \right) \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -\frac{1}{n} \cos(nx) dx \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n} \left[x \cdot \cos(nx) \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi n} (2\pi \cos(2\pi n) - 0) = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe lautet also

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nx)$$

3. Ausschreiben der Fourierreihe liefert die Lösung über einen einfachen Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx) \\
5b &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos(x) + b_1 \cdot \sin(x) + a_2 \cdot \cos(2x) + b_2 \cdot \sin(nx) + \ldots \\
&\Rightarrow 5b = \frac{a_0}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = 10b \\
&\Rightarrow a_n = 0 \forall n > 0; \quad b_n = 0.
\end{aligned}$$