Hilfsformeln

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln \mid x \mid + C$$

$$a \cdot \ln(x) = \ln(x^a)$$

Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)dx$$
$$a_n = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad b_n = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Minimierung der quadratischen Abweichung vom arithmetischen Mittel $\bar{x}, \bar{y}$ für eine lineare Funktion $f(x) = a + b \cdot x$:

$$b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}, a = \bar{y} - a \cdot \bar{x}$$

$$S_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$$

$$S_{xx} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int \frac{3}{2(x^2-1)} dx$

(b) $\int x^4 \ln(2x) dx$

(c) $\int \ln(x) dx$ (Hinweis: $\ln(x) = 1 \cdot \ln(x)$)

Aufgabe 2

Berechnen Sie über ein Doppelintegral die Fläche des halben Kreisringes

$$\iint\limits_{(A)} dA; \quad y \geq 0; 4 \leq x^2 + y^2 < 9.$$

Welche Art von Koordinaten sind sinnvoll?

Aufgabe 3

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) - x y'(x) + y(x) = 0, \qquad x > 0$$

(a) Um was für eine Differentialgleichung handelt es sich?

(b) Zeigen sie, dass die Funktion $f(x) = x \ln x$, $(x > 0)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

(c) ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{x}$ ebenfalls eine Lösung?

Aufgabe 4

Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = y^2 \cdot (sinx + 1)$$

Aufgabe 5

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$2xy' - y = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \qquad y \to -1 \text{ für } x \to \infty$$

durch Berechnung der Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und Variation der Konstanten.

Aufgabe 6

Um weclche Art von Differentialgleichungen handelt es sich bei den folgenden zwei Beispielen:

$$y'^2 + 2y - 3x + \sin x = 0 \tag{1}$$

$$y'' = 4x \tag{2}$$

Gleichung	(1)	(2)
linear	☐	☐
nicht-linear	☐	☐
homogen	☐	☐
inhomogen	☐	☐
Ordnung	___	___

Aufgabe 7

Die Funktion $f(x) = 4$ kann wegen $f(x) = f(x + 2\pi)$ als 2π-periodisch betrachtet werden. Sie genügt außerdem den Dirichletschen Bedingungen und kann damit in eine Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)]$$

entwickelt werden.
Geben Sie die Fourier-Koeffizienten a_0, a_n und b_n an.

Aufgabe 8

In Tabelle 1 sind Gewicht und Körpergröße einiger Schüler zusammengefasst:

Größe (cm)	Gewicht (kg)
157	45
157	47
159	45
163	55
165	56

Tabelle 1: Größe und Gewicht einer Stichprobe von Schülern.

(a) Skizzieren Sie ein Streudiagramm der Werte.

(b) Bestimmen Sie mit der Methode der kleinsten Quadrate eine Ausgleichsgerade $y = a + b \cdot x$.

(c) Benutzen Sie die berechneten Werte, um das voraussichtliche Gewicht eines Schülers mit einer Körpergröße von 195,97cm abzuschätzen.