Aufgabe 1

Gegeben ist die Relation $r(x) = \sin(|x+1|)$ mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$.

(a) Schreiben Sie die Relation in betragsfreier Form und untersuchen Sie $r(x)$ auf Symmetrie. Handelt es sich um eine gerade oder ungerade Funktion oder Relation? (3 Punkte)

(b) Untersuchen Sie $r(x)$ an der Stelle $x_0 = -1$ auf Stetigkeit. (3 Punkte)

(c) Skizzieren Sie $r(x)$ mit Definitionsbereich $D = [-2\pi - 1; 2\pi - 1]$. (2 Punkte)

Aufgabe 2

(12 Punkte)
Gegeben sind die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und die Ebene

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$

(a) ist $g \parallel E$?

(b) liegt g in der Ebene E?

(c) schneidet die Gerade g die Ebene E?

Aufgabe 3

(4 Punkte)
Untersuchen Sie die unendliche Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{k}+1)^2}{k^2 + \sqrt{k^4 - 1}}$$

auf Konvergenz.

Aufgabe 4

(6 Punkte)
Bestimmen Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung des Sinus den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0+} (\sin(x))^{2x}$$

(Hinweis: $\lim_{x \to 0+} x^x = 1$).

Aufgabe 5

f und g seien reelle Funktionen und $u = f + g, v = f - g$.

(a) Warum sind f und g stetig, wenn sowohl u als auch v stetig sind? (3 Punkte)

(b) Warum folgt aus der Stetigkeit von u allein nicht die Stetigkeit von f und g (Hinweis: es lässt sich leicht ein Gegenbeispiel finden)? (3 Punkte)

Aufgabe 6

(5 Punkte)
Berechnen Sie die komplexe Zahl $\sin(i)$.

Aufgabe 7

(6 Punkte)
Summiert man die ungeraden Zahlen von 1 bis $2n-1$, so kann man erkennen, dass diese Summe gleich dem Quadrat von n ist:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 4 \\ 1+3+5 &= 9 \\ 1+3+5+7 &= 16 \end{aligned}$$

oder in Form einer Summe

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

Beweisen Sie diese Beziehung mithilfe der vollständigen Induktion.

Aufgabe 8

(8 Punkte)
Berechnen Sie bzw. lösen Sie

(a)

$$\prod_{i=2}^{5}(i-1)+\sum_{k=0}^{3}(2k+1)$$

(b)

$$4!+\sum_{k=1}^{4}(2k-1)$$

(c)

$$-(2-3x)-3x=-1-1$$

(d)

$$3x^3-24x^2+20x+2=2-25x$$