**Aufgabe 1**

Gegeben ist die Relation

$$r(x) = \frac{1}{|5(x-2)^3|}$$

mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$.

(a) Handelt es sich um eine Funktion? Schreiben Sie $r(x)$ in betragsfreier Form und untersuchen Sie die Relation auf Symmetrie. (3 Punkte)

(b) Untersuchen Sie $r(x)$ an der Stelle $x_0 = 2$ auf Stetigkeit. (3 Punkte)

(c) Wie verhält sich $r(x)$ für große/kleine Variablenwerte? (2 Punkte)

(d) Skizzieren Sie $r(x)$ mit Definitionsbereich $D = [-1; 5]$. (2 Punkte)

**Aufgabe 2**

(12 Punkte)
Der Punkt $P$ lässt sich in einem kartesischen Koordinatensystem durch den Vektor

$$P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

beschreiben. Durch eine Spiegelung an der $y$-Achse ergibt sich daraus der Punkt $Q$. Die Spiegelung kann als Symmetrieoperation durch eine Matrix $A = (a_{ij})$ beschrieben werden, es gilt

$$A \cdot P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q$$

(a) Wie lauten die Koordinaten des Punkts $Q$? Berechnen Sie die Matrix $A$.

(b) Stellen Sie die Matrix $B = (b_{ij})$ auf, die die Spiegelung an der $x$-Achse beschreibt.

(c) Wie sieht die Matrix $C = (c_{ij})$, die eine Punktspiegelung am Ursprung beschreibt, aus? Was passiert, wenn das Produkt $A \cdot B$ auf den Punkt $P$ angewendet wird? Was lässt sich daraus folgern?

**Aufgabe 3**

(8 Punkte)
Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

auf Konvergenz. Berechnen Sie den Wert der Summe (Hinweis: das Folgenglied kann als Differenz zweier Brüche ausgedrückt werden, der Wert der Summe ist der Grenzwert der Partialsummen für $n \to \infty$).

**Aufgabe 4**

(6 Punkte)
Bestimmen Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung des Sinus den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0+} (\sin(x))^{2x}$$

(Hinweis: $\lim_{x \to 0+} x^x = 1$).

**Aufgabe 5**

(5 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 8a + 16x & x < 2 \\ a^2(x+2) & x \geq 2 \end{cases}$$

Bestimmen Sie den Parameter $a$ so, dass die Funktion in $x = 2$ stetig ist.

**Aufgabe 6**

(5 Punkte)
Berechnen Sie die komplexe Zahl $\cos(i)$.

**Aufgabe 7**

(6 Punkte)
Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Beziehung

$$\sum_{k=1}^{n} k^1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

für alle $n \in \mathbb{N}; n > 0$ erfüllt ist.

**Aufgabe 8**

(5 Punkte)
Berechnen Sie bzw. lösen Sie

(a)

$$\prod_{i=2}^{5}(i-1) + \sum_{k=0}^{3}(2k+1)$$

(b)

$$4! + \sum_{k=1}^{4}(2k-1)$$

(c)

$$3x^3 - 24x^2 + 20x + 2 = 2 - 25x$$