

Hilfsformeln

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$a \cdot \ln(x) = \ln(x^a)$$

Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Additionstheorem:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Polarkoordinaten: r, φ mit

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad dA = r \cdot dr \cdot d\varphi$$

Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a)

$$\int x \cdot \cos(3x) dx$$

(b)

$$\int x^2 \ln(2x) dx$$

(c)

$$\int_0^{\pi} (\cos(-x))^2 + (\sin(x))^2 dx$$

Aufgabe 2

Gegeben sei ein Bereich (A) : $y \geq 0$; $2 \leq x^2 + y^2 < 9$. Skizzieren Sie den Bereich und berechnen Sie die Fläche A innerhalb des Bereiches über

ein Doppelintegral

$$A = \iint_{(A)} dA; \quad y \geq 0; 2 \leq x^2 + y^2 < 9.$$

Welche Art von Koordinaten sind sinnvoll? Warum?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + x^2 (y(x))^3 = 0$$

und geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y(1) = 2$ an. Um welchen Typ DGL handelt es sich?

Aufgabe 4

Liegt an einer Spule mit der Induktivität L und dem elektrischen Widerstand R eine Gleichspannung U_0 an, so gilt für die Spannung an der Spule

$$U(t) = U_0 - L\dot{I}(t).$$

Nach dem ohmschen Gesetz gilt daher für einen Stromkreis aus Spule und ohmschem Widerstand in Reihenschaltung

$$I(t) = \frac{U_0}{R} - \frac{L}{R}\dot{I}$$

oder

$$\dot{I}(t) + \frac{R}{L}I(t) = \frac{U_0}{L}.$$

Es handelt sich um eine gewöhnliche, lineare und inhomogene DGL 1. Ordnung. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

- über die Variation der Konstanten
- über das Aufsuchen einer partikulären Lösung

Aufgabe 5

Um welche Art von Differentialgleichungen handelt es sich bei den folgenden zwei Beispielen?

$$y' + 2y - 3x + \sin x = 0 \quad (1)$$

$$y'' + yx^3 = 4x^2 \quad (2)$$

Gleichung	(1)	(2)
linear	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
nicht-linear	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
homogen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
inhomogen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ordnung	—	—

Aufgabe 6

Die Funktion $f(x) = \pi \cdot \sin(x)$ ist 2π -periodisch, denn $f(x) = f(x + 2\pi)$. Sie genügt den Dirichletschen Bedingungen und kann in eine Fourier-Reihe der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

entwickelt werden. Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten a_0 , a_n und b_n und geben Sie die Fourier-Reihe an.

Aufgabe 7

Welche der folgenden Funktionen sind periodisch? Geben Sie, wenn möglich, das Periodenintervall an

a) $f(x) = \cos(x + 1)$

b) $f(x) = x \cdot \cos(5x)$

c) $\sin^2(x) + \cos^2(x) - 2x$