Aufgabe 1

(10 Punkte)
Gegeben ist die Relation $r(x) = \sin(|x-3|)$ mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$.

(a) Schreiben Sie die Relation in betragsfreier Form und untersuchen Sie $r(x)$ auf Symmetrie. Handelt es sich um eine gerade oder ungerade Funktion oder Relation?

(b) Ist $r(x)$ stetig? Ist es eine Funktion?

(c) Skizzieren Sie $r(x)$ mit Definitionsbereich $D = [-2\pi + 3; 2\pi + 3]$.

Aufgabe 2

(8 Punkte)
Finden Sie alle Lösungen der Gleichungen

a) $x(x^2 - 7) = -6$

b) $x^3 + 6x^2 + 9x = 0$

c) $3x^3 - 24x^2 + 20x + 2 = 2 - 25x$

Aufgabe 3

(5 Punkte)
Berechnen Sie die Werte

(a)

$$\prod_{i=2}^{5}(i-1) + \sum_{k=0}^{3}(2k+1)$$

(b)

$$4! + \sum_{k=1}^{4}(2k-1)$$

Aufgabe 4

(6 Punkte)
Bestimmen Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung des Sinus den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0+} (\sin(x))^{2x}$$

(Hinweis: $\lim_{x \to 0+} x^x = 1$).

Aufgabe 5

(5 Punkte)
f und g seien reelle Funktionen und $u = f + g, v = f - g$.

(a) Warum sind f und g stetig, wenn sowohl u als auch v stetig sind? (3 Punkte)

(b) Warum folgt aus der Stetigkeit von u allein nicht die Stetigkeit von f und g (Hinweis: es lässt sich leicht ein Gegenbeispiel finden)? (3 Punkte)

Aufgabe 6

(5 Punkte)
Berechnen Sie die komplexe Zahl $\sin(i)$.

Aufgabe 7

(7 Punkte)
Summiert man die ungeraden Zahlen von 1 bis $2n-1$, so kann man erkennen, dass diese Summe gleich dem Quadrat von n ist:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 4 \\ 1+3+5 &= 9 \\ 1+3+5+7 &= 16 \end{aligned}$$

oder in Form einer Summe

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

Beweisen Sie diese Beziehung mithilfe der vollständigen Induktion.

Aufgabe 8

(8 Punkte)
Weisen Sie nach, dass die Funktion oder Relation $f(x) = x^3 + x^2 + 4;\ \ x \in \mathbb{R}$ stetig ist (die binomischen Formeln $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ und $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ sind hilfreich). Ist $g(x) = (x-1)^{-1};\ \ x \in \mathbb{R}$ ebenfalls stetig? Handelt es sich bei $g(x)$ und $f(x)$ um Funktionen?