Aufgabe 1

(5 Punkte) U sei der Umfang eines Rechtecks mit $a \geq 0$ und $b \geq 0$. Wie muss das Rechteck beschaffen sein, um eine möglichst große Fläche zu besitzen?

Warum liefert die Rechnung kein Ergebnis, wenn man das Rechteck mit der kleinsten Fläche sucht?

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die durch die Funktion

$$f(x) = 3\sin(x) + 2\cos(3x)$$

gegebene Kurve im Punkt $P = (0; 0)$. Geben Sie das Mac Laurinsche Polynom bis $n = 1$ an. (6 Punkte)

Aufgabe 3

Welche der folgenden Funktionen sind differenzierbar (Begründung)? Bestimmen Sie für die differenzierbaren Funktionen die Ableitung. (12 Punkte)

a) $e^{3x} \cdot 2x$

b) $e^{x^3} \cdot 2x^2$

c) $\left(\sqrt{x^2+3}\right)^5$

d) $\frac{x^2}{x^2+3}$

e) $e^{\cos(2x)}$

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3} (x \in \mathbb{R})$. Untersuchen Sie $f(x)$ auf Nullstellen, Extrema, Wendepunkte und Krümmungsverhalten (ohne dritte Ableitung - die Funktion besitzt keine Sattelpunkte). Wie verhält sich die Funktion für $x \to \pm\infty$?

Skizzieren Sie die Funktion mit Hilfe der gefundenen Werte im Intervall $I = [-10; 10]$. (14 Punkte)

Aufgabe 5

Bestimmen Sie näherungsweise den Wert

$$\frac{\sqrt{2,1}}{\sqrt{2}},$$

indem Sie die 'krumme' Wurzel im Zähler durch ein Taylorpolynom $T_1(x)$ ausdrücken.

Wie lautet der dritte Term der Entwicklung? Schätzen Sie, ob er das Ergebnis merklich beeinflussen kann. (11 Punkte)

Aufgabe 6

(Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^n, \;\; n \in \mathbb{N}, \; x \in \mathbb{R}$.

a) Für welche $n > 0$ ist $f(x)$ differenzierbar?

b) Berechnen Sie die erste Ableitung $f'(x)$ direkt über den Grenzwert des Differenzenquotienten.

c) Berechnen Sie die erste Ableitung von x^2, x^3 und x^4 mithilfe der Produktregel.

d) Man erkennt die Ableitungsregel $(x^n)' = n \cdot (x^{n-1})$. Beweisen Sie, dass sie für alle ganzzahligen $n \geq 1$ gilt.

(7 Punkte)