Hilfsformeln

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln \mid x \mid + C$$

$$a \cdot \ln(x) = \ln(x^a)$$

Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad b_n = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Additionstheorem:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Polarkoordinaten: r, φ mit

$$x = r \cos\varphi; \quad y = r \sin\varphi; \quad dA = r \cdot dr \cdot d\varphi$$

Laplace-Transformierte der 1. Ableitung:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(t = 0)$$

Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a)

$$\int x \cdot \cos(3x) dx$$

(b)

$$\int_0^{\pi} (\cos(-x))^2 + (\sin(x))^2 \, dx$$

Aufgabe 2

Gegeben sei ein Bereich $(A): \quad y \geq 0; \ 2 \leq x^2 + y^2 < 9$. Skizzieren Sie den Bereich und berechnen Sie die Fläche A innerhalb des Bereiches über ein Doppelintegral

$$A = \iint\limits_{(A)} dA; \quad y \geq 0; 2 \leq x^2 + y^2 < 9.$$

Welche Art von Koordinaten sind sinnvoll? Warum?

Aufgabe 3

Von welchem Typ ist die Differentialgleichung $y' + y = 2x + 5$? Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$.

Aufgabe 4

Liegt an einer Spule mit der Induktivität L und dem elektrischen Widerstand R eine Gleichspannung U_0 an, so gilt für die Spannung an der Spule

$$U(t) = U_0 - L\dot{I}(t).$$

Nach dem ohmschen Gesetz gilt daher für einen Stromkreis aus Spule und ohmschem Widerstand in Reihenschaltung

$$I(t) = \frac{U_0}{R} - \frac{L}{R}\dot{I}$$

oder

$$\dot{I}(t) + \frac{R}{L}I(t) = \frac{U_0}{L}.$$

Es handelt sich um eine gewöhnliche, lineare und inhomogene DGL 1. Ordnung. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

a) über die Variation der Konstanten

b) über das Aufsuchen einer partikulären Lösung

Aufgabe 5

Um welche Art von Differentialgleichungen handelt es sich bei den folgenden zwei Beispielen?

$$y'^2 + 2y - 3x + \sin x = 0 \quad (1)$$
$$y^{(3)} + yx^3 = 4y \quad (2)$$

Gleichung	(1)	(2)
linear	☐	☐
nicht-linear	☐	☐
homogen	☐	☐
inhomogen	☐	☐
Ordnung	___	___

Aufgabe 6

Die Funktion $f(x) = \pi \cdot \cos(x)$ ist 2π-periodisch, denn $f(x) = f(x + 2\pi)$. Sie genügt den Dirichletschen Bedingungen und kann in eine Fourier-Reihe der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

entwickelt werden. Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten a_0, a_n und b_n und geben Sie die Fourier-Reihe an.

Aufgabe 7

Gegeben ist die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} f(t) + \lambda f(t) = 0.$$

a) Lösen Sie die DGL durch Integration

b) Lösen Sie die DGL über eine Laplace-Transformation. Die dazu benötigte Laplace-Tranformierte lautet

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = F(s) = \frac{1}{s+a}$$