Hilfsformeln

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln \mid x \mid + C$$

$$a \cdot \ln(x) = \ln(x^a)$$

Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Additionstheorem:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Polarkoordinaten: r, φ mit

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi; \quad dA = r \cdot dr \cdot d\varphi$$

Laplace-Transformierte der 1. Ableitung:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(t=0)$$

Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a)

$$\int x \cdot \cos(3x) dx$$

(b)

$$\int_0^{\pi} (\cos(-x))^2 + (\sin(x))^2 \, dx$$

(c)

$$\int \ln(x) dx$$

(Hinweis: $\ln(x) = 1 \cdot \ln(x)$)

Aufgabe 2

Gegeben sei ein Bereich (A) : $x \geq 0;\ 0 \leq x^2 + y^2 < 4$. Skizzieren Sie den Bereich und berechnen Sie das Doppelintegral über die Funktion $f(x) = x$ innerhalb des Bereichs (A)

$$\iint\limits_{(A)} x dA; \quad x \geq 0; 0 \leq x^2 + y^2 < 4.$$

Welche Art von Koordinaten sind sinnvoll? Warum?

Aufgabe 3

Von welchem Typ ist die Differentialgleichung $y' + y = 2x + 5$? Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$.

Aufgabe 4

Liegt an einer Spule mit der Induktivität L und dem elektrischen Widerstand R eine Gleichspannung U_0 an, so gilt für die Spannung an der Spule

$$U(t) = U_0 - L\dot{I}(t).$$

Nach dem ohmschen Gesetz gilt daher für einen Stromkreis aus Spule und ohmschem Widerstand in Reihenschaltung

$$I(t) = \frac{U_0}{R} - \frac{L}{R}\dot{I}$$

oder

$$\dot{I}(t) + \frac{R}{L}I(t) = \frac{U_0}{L}.$$

Es handelt sich um eine gewöhnliche, lineare und inhomogene DGL 1. Ordnung. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

a) über die Variation der Konstanten

b) über das Aufsuchen einer partikulären Lösung

Aufgabe 5

Um welche Art von Differentialgleichungen handelt es sich bei den folgenden zwei Beispielen?

$$y'^2 + 2y - 3x + \sin x = 0 \tag{1}$$
$$y'' + yx^3 = 4y^2 \tag{2}$$

Gleichung	(1)	(2)
linear	☐	☐
nicht-linear	☐	☐
homogen	☐	☐
inhomogen	☐	☐
Ordnung	___	___

Aufgabe 6

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0, \qquad x > 0$$

(a) Um was für eine Differentialgleichung handelt es sich?

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = x \ln x$, $(x > 0)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

(c) ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{x}$ ebenfalls eine Lösung?

Aufgabe 7

Ein einfacher Schaltkreis enthält als einziges Bauteil eine Spule mit Induktivität L (der ohmsche Widerstand wird vernachlässigt), an die eine Wechselspannung $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$ angelegt wird. Der Strom zur Zeit $t = 0$ sei $i(0) = 0$ (es findet kein Einschaltvorgang statt!). Die an der Spule abfallende Spannung ist dann

$$u_L(t) = -L\frac{di(t)}{dt}$$

a) Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf der Stromstärke für $t \geq 0$ durch Aufstellen und lösen der zugehörigen Differentialgleichung. Um welchen Typ DGL handelt es sich?

b) Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf der Stromstärke für $t \geq 0$ mit Hilfe der Laplace-Transformation. Dafür benötigt werden die Korrespondenzen

$$\cos(\omega t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad \sin(\omega t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$