Aufgabe 1

(8 Punkte)
gegeben ist eine quadratische Polynomfunktion

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie Nullstellen und Schnittpunkt mit der y-Achse.

b) Ist die Funktion symmetrisch?

c) Skizzieren Sie das Schaubild der Funktion in einem geeigneten Intervall.

Aufgabe 2

(10 Punkte)
Lösen bzw. berechnen Sie

a) die Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$$

b)

$$\prod_{i=1}^{4} i + \sum_{k=0}^{4} k + \sum_{l=1}^{3} 2$$

c)

$$5! + \sum_{k=0}^{3} (2k+1)$$

Aufgabe 3

(14 Punkte)
Eine komplexe Zahl z_1 wird in Darstellung durch den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{6}$ und den Betrag $r = 2$ beschrieben (Es gilt $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$).

a) Skizzieren Sie die Zahl in der Gauß-Ebene

b) Stellen Sie die Zahl in der kartesischen Form als $z_1 = a + i \cdot b$ dar

c) Wie lautet der Betrag $|z_1|$ und die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z_1}$ zu z_1?

d) Gegeben sei eine weitere Zahl $z_2 = 3 + i$. Berechnen Sie $z_1 + z_2$, $z_2 - z_1$ und den Quotienten z_2/z_1.

Aufgabe 4

(7 Punkte)
Zeigen Sie, dass $n^2 + n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine gerade Zahl (also ohne Rest durch 2 teilbar) ist.

Aufgabe 5

(16 Punkte)
Gegeben ist das folgende Lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - \quad x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + \quad x_3 &= 2 \\ 2x_2 + \quad 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

a) Warum heißt das LGS linear? Die Matrixgleichung zum gegebenen LGS ist

$$A \cdot x = b \text{ mit } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Matrix A an und stellen Sie die Matrixgleichung auf.

b) Ein weiterer Vektor sei

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$A \cdot v, \quad v \cdot A, \quad \text{und } v^T \cdot A$$

c) Lösen Sie das LGS.