

Hilfsformeln

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$a \cdot \ln(x) = \ln(x^a)$$

Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Additionstheorem:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Polarkoordinaten: r, φ mit

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad dA = r \cdot dr \cdot d\varphi$$

Laplace-Transformierte der 1. Ableitung:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(t=0)$$

Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a)

$$\int \sin(x) e^{-\cos(x)} dx$$

(eine geeignete Substitution ist $u(x) = \cos(x)$)

(b)

$$\int_0^{\pi} (\cos(-x))^2 + (\sin(x))^2 dx$$

(c)

$$\int \ln(x) dx$$

(Hinweis: $\ln(x) = 1 \cdot \ln(x)$)

Aufgabe 2

Gegeben sei ein Bereich (A) : $y \geq 0$; $2 \leq x^2 + y^2 < 9$. Skizzieren Sie den Bereich und berechnen Sie die Fläche A innerhalb des Bereiches über ein Doppelintegral

$$A = \iint_{(A)} dA; \quad y \geq 0; 2 \leq x^2 + y^2 < 9.$$

Welche Art von Koordinaten sind sinnvoll? Warum?

Aufgabe 3

Von welchem Typ ist die Differentialgleichung $y'(x) + \sin(x) \cdot y(x) = 3 \sin(x)$? Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ über die Variation der Konstanten. Dazu ist das Integral

$$\int \sin(x)e^{-\cos(x)} dx = e^{-\cos(x)} + C$$

hilfreich.

Aufgabe 4

Liegt an einer Spule mit der Induktivität L und dem elektrischen Widerstand R eine Gleichspannung U_0 an, so gilt für die Spannung an der Spule

$$U(t) = U_0 - L\dot{I}(t).$$

Nach dem ohmschen Gesetz gilt daher für einen Stromkreis aus Spule und ohmschem Widerstand in Reihenschaltung

$$I(t) = \frac{U_0}{R} - \frac{L}{R}\dot{I}$$

oder

$$\dot{I}(t) + \frac{R}{L}I(t) = \frac{U_0}{L}.$$

Es handelt sich um eine gewöhnliche, lineare und inhomogene DGL 1. Ordnung. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

a) über das Aufsuchen einer partikulären Lösung

Aufgabe 5

Die Funktion $f(x) = \pi \cdot \sin(x)$ ist 2π -periodisch, denn $f(x) = f(x + 2\pi)$. Sie genügt den Dirichletschen Bedingungen und kann in eine Fourier-Reihe der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

entwickelt werden. Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten a_0 , a_n und b_n und geben Sie die Fourier-Reihe an.

Aufgabe 6

Ein einfacher Schaltkreis enthält als einziges Bauteil eine Spule mit Induktivität L (der ohmsche Widerstand wird vernachlässigt), an die eine Wechselspannung $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$ angelegt wird. Der Strom zur Zeit $t = 0$ sei $i(0) = 0$ (es findet kein Einschaltvorgang statt!). Die an der Spule abfallende Spannung ist dann

$$u_L(t) = -L \frac{di(t)}{dt}$$

- Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf der Stromstärke für $t \geq 0$ durch Aufstellen und lösen der zugehörigen Differentialgleichung. Um welchen Typ DGL handelt es sich?
- Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf der Stromstärke für $t \geq 0$ mit Hilfe der Laplace-Transformation. Dafür benötigt werden die Korrespondenzen

$$\cos(\omega t) \circ \bullet \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \sin(\omega t) \circ \bullet \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$