Aufgabe 1

(9 Punkte) Gegeben ist die Relation

$$r(x) = \frac{1}{|2x-1|}$$

mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}; x \neq \frac{1}{2}$.

(a) Handelt es sich um eine Funktion? Schreiben Sie $r(x)$ in betragsfreier Form und untersuchen Sie die Relation auf Symmetrie.

(b) Untersuchen Sie, ob die zugehörige Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } a_n = \frac{1}{2n-1}$$

einen Grenzwert besitzt

(c) Wie verhält sich $r(x)$ für große/kleine Variablenwerte?

(d) Skizzieren Sie $r(x)$ mit geeignetem Definitionsbereich.

Aufgabe 2

(9 Punkte) Lösen bzw. berechnen Sie

a) die Gleichung

$$x^3 - \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} = 0$$

b)

$$\prod_{i=1}^{4} i + \sum_{k=0}^{4} k + \sum_{l=1}^{3} 2$$

c)

$$4! + \sum_{k=1}^{4} k^2$$

Aufgabe 3

(6 Punkte) Arno Nym verhandelt mit seiner Oma Mira Nym (geborene Bellenbaum) über sein Taschengeld. Oma Mira bietet eine Einmalzahlung von 30,- und die Zahlung von 10,- bei jedem weiteren Besuch. Arno hätte gern sofort 0,50, beim nächsten Besuch 1,- gefolgt von 1,50 beim übernächsten Besuch, also bei jedem Besuch eine Steigerung um -,50.

Wieviele Besuche der Oma müssen vergehen, bis Arno gegenüber der Version seiner Oma gewinnt?

Aufgabe 4

(6 Punkte)
Bestimmen Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung des Sinus den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0+} (\sin(x))^{2x}$$

(Hinweis: $\lim_{x \to 0+} x^x = 1$).

Aufgabe 5

(14 Punkte) Eine komplexe Zahl z_1 wird in der Gaußschen Zahlenebene durch den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und die Länge $r = 2\sqrt{2}$ dargestellt
($\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$).

a) Skizzieren Sie die Zahl in der Gauß-Ebene

b) Stellen Sie die Zahl in der kartesischen Form als $z_1 = a + i \cdot b$ dar

c) Wie lautet der Betrag $|z_1|$ und die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z_1}$ zu z_1?

d) Gegeben sei eine weitere Zahl $z_2 = 1 + 2i$. Berechnen Sie $z_1 \cdot z_2$ und den Quotienten z_2/z_1.

Aufgabe 6

(6 Punkte)
Summiert man die ungeraden Zahlen von 1 bis $2n-1$, so kann man erkennen, dass diese Summe gleich dem Quadrat von n ist:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 4 \\ 1+3+5 &= 9 \\ 1+3+5+7 &= 16 \end{aligned}$$

oder in Form einer Summe

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

Beweisen Sie diese Beziehung mithilfe der vollständigen Induktion.

Aufgabe 7

(5 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 8a + 16x & x < 2 \\ a^2(x+2) & x \geq 2 \end{cases}$$

Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die Funktion stetig in $x = 2$ ist (also keine Lücke hat).