Hilfsformeln

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln \mid x \mid + C$$

$$a \cdot \ln(x) = \ln(x^a)$$

Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Additionstheorem:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Polarkoordinaten: r, φ mit

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi; \quad dA = r \cdot dr \cdot d\varphi$$

Laplace-Transformierte der 1. Ableitung:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(t=0)$$

$$\mathcal{L}\{sin(t)\} = \frac{1}{s^2+1}$$

Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a)

$$\int \sin(x) e^{-\cos(x)} dx$$

(b)

$$\int_0^\pi (\cos(-x))^2 + (\sin(x))^2 \, dx$$

(c)

$$\int \ln(x) dx$$

(Hinweis: $\ln(x) = 1 \cdot \ln(x)$)

Aufgabe 2

Gegeben sei ein Bereich $(A): \quad x \leq 0;\ 1 \leq x^2 + y^2 < 9$. Skizzieren Sie den Bereich und berechnen Sie das Doppelintegral über die Funktion $f(x) = x$ innerhalb des Bereichs (A)

$$A = \iint_{(A)} f(x) dA; \quad x \leq 0; 1 \leq x^2 + y^2 < 9.$$

Welche Art von Koordinaten sind sinnvoll? Warum?

Aufgabe 3

Von welchem Typ ist die Differentialgleichung $y'(x) + 3\lambda y(x) = e^{-3\lambda x} \sin(x)$? Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ über die Variation der Konstanten.

Aufgabe 4

Liegt an einer Spule mit der Induktivität L und dem elektrischen Widerstand R in Reihenschaltung eine Gleichspannung U_0 an, so gilt für die Spannung am Widerstand

$$U_R = R \cdot I(t) = U_0 - L\dot{I}(t).$$

Also gilt für den betrachteten Stromkreis

$$I(t) = \frac{U_0}{R} - \frac{L}{R}\dot{I}$$

oder

$$\dot{I}(t) + \frac{R}{L} I(t) = \frac{U_0}{L}.$$

Es handelt sich um eine gewöhnliche, lineare und inhomogene DGL 1. Ordnung. Bestimmen Sie ihre allgemeine Lösung.

Aufgabe 5

Die Funktion $f(x) = \pi \cdot \sin(x)$ ist 2π-periodisch, denn $f(x) = f(x + 2\pi)$. Sie genügt den Dirichletschen Bedingungen und kann in eine Fourier-Reihe der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

entwickelt werden. Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten a_0, a_n und b_n und geben Sie die Fourier-Reihe an.

Aufgabe 6

Bei der einfachen Differentialgleichung

$$\ddot{f}(t) + f(t) = 0$$

handelt es sich um eine typische Schwingungsgleichung. Lösen Sie die DGL mit den beiden Randbedingungen $f(0) = 0$ und $\dot{f}(0) = 1$ über eine Laplace-Transformation.