Hilfsformeln

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln \mid x \mid + C$$

Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Additionstheorem:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Polarkoordinaten: r, φ mit

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad dA = r \cdot dr \cdot d\varphi$$

Laplace-Transformierte:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = F(s) = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(t = 0)$$

Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a)

$$\int_0^2 3xe^{x^2} dx$$

(b)

$$\int x \cdot \cos(3x) dx$$

(c)

$$\int_0^{\pi} (\cos(-x))^2 + (\sin(x))^2 \, dx$$

Aufgabe 2

Der Bereich (A) ist definiert über $y \geq 0;\; 2 \leq x^2 + y^2 < 9$. Welche Art von Koordinaten sind sinnvoll? Warum?
Skizzieren Sie den Bereich und berechnen Sie die Fläche A innerhalb des Bereiches über ein Doppelintegral

$$A = \iint\limits_{(A)} dA; \qquad y \geq 0; 2 \leq x^2 + y^2 < 9.$$

Aufgabe 3

Von welchem Typ ist die Differentialgleichung $y' + y = 2x + 5$? Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ (am einfachsten über eine partikuläre Lösung).

Aufgabe 4

Liegt an einer Spule mit der Induktivität L und dem elektrischen Widerstand R eine Gleichspannung U_0 an, so gilt für die Spannung an der Spule

$$U(t) = U_0 - L\dot{I}(t).$$

Nach dem ohmschen Gesetz gilt daher für einen Stromkreis aus Spule und ohmschem Widerstand in Reihenschaltung

$$\dot{I}(t) + \frac{R}{L} I(t) = \frac{U_0}{L}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

Aufgabe 5

Um welche Art von Differentialgleichung handelt es sich jeweils bei den folgenden zwei Beispielen?

$$y'^2 + 2y - 3x + \sin x = 0 \tag{1}$$

$$y^{(3)} + yx^3 = 4y \tag{2}$$

Gleichung	(1)	(2)
linear	□	□
nicht-linear	□	□
homogen	□	□
inhomogen	□	□
Ordnung	___	___

Wieviele Lösungen besitzen die beiden Differentialgleichungen?

Aufgabe 6

Gegeben sei die 2π-periodische Sägezahnfunktion, die durch

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

für $0 \leq x < 2\pi$ und die periodische Fortsetzung definiert ist. Sie genügt den Dirichletschen Bedingungen und kann in eine Fourier-Reihe der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)]$$

entwickelt werden, wobei $a_n = 0$ für $n = 0, 1, 2, 3, ...$ (es handelt sich um eine ungerade Funktion). Berechnen Sie den Fourier-Koeffizienten mit der Nummer zwei (b_2).

Aufgabe 7

Beim radioaktiven Zerfall ist der Bruchteil dN der Atomkerne eines Nuklids, die sich in einem Zeitintervall dt umwandeln, proportional zur Anzahl N der jeweils vorhandenen radioaktiven Kerne (λ ist die Zerfallskonstante):

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

a) Lösen Sie die DGL durch Integration mit der Randbedingung $N(t = 0) = N_0$

b) Lösen Sie die DGL über eine Laplace-Transformation mit der Randbedingung $N(t = 0) = N_0$.