Hilfsformeln

Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Additionstheorem:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Polarkoordinaten: r, φ mit

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi; \quad dA = r \cdot dr \cdot d\varphi$$

Laplace-Transformierte:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = F(s) = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(t=0)$$

Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a)

$$\int_0^2 x^2 e^x dx$$

(b)

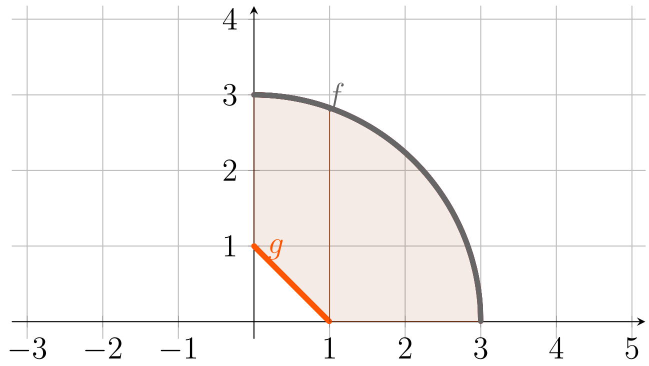
$$\int \frac{1}{x^2 - 2x} dx$$

(c)

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(x))^2 + (\sin(-x))^2 \, dx$$

Aufgabe 2

Die Funktion $f(x)$ ist definiert über $y \geq 0;\ x \geq 0;\ 0 \leq x^2 + y^2 < 9$, die Funktion $g(x) = -x + 1$ für $0 \leq x \leq 1$.



Bestimmen Sie die schraffierte Fläche zwischen f und g bzw. der x-Achse über ein Doppelintegral.

Aufgabe 3

Von welchem Typ ist die Differentialgleichung

$$xy'(x) - y(x) = x^2 \cos(x)?$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ und die Lösung des Anfangswertproblems mit der gegebenen DGL und $y(\pi/2) = \pi$.

Aufgabe 4

Um welche Art von Differentialgleichung handelt es sich jeweils bei den folgenden zwei Beispielen?

$$y'^2 + 2y - 3x + \sin x = 0 \quad (1)$$

$$y^{(3)} + yx^3 = 4y \quad (2)$$

$$F(y'', y', \sin(y)) = 0 \quad (3)$$

Gleichung	(1)	(2)	3
linear	☐	☐	☐
nicht-linear	☐	☐	☐
homogen	☐	☐	☐
inhomogen	☐	☐	☐
Ordnung	___	___	___

Wieviele Lösungen besitzen die beiden Differentialgleichungen?

Aufgabe 5

Gegeben sei die 2π-periodische Sägezahnfunktion, die durch

$$f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x) \text{ für } 0 \leq x < 2\pi$$

und die periodische Fortsetzung definiert ist. Sie genügt den Dirichletschen Bedingungen und kann damit in eine Fourier-Reihe der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)]$$

entwickelt werden. Bestimmen Sie die Fourier-Reihe.

Aufgabe 6

Gegeben ist die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} f(t) = -\lambda f(t)$$

mit der Anfangsbedingung $f(t = 0) = f_0$

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem durch Integration.

b) Lösen Sie Anfangswertproblem über eine Laplace-Transformation.