Hilfsformeln

Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Euler-Formel

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Laplace-Transformierte

$$e^{ax} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(s-a)}$$

Aufgabe 1

Berechnen Sie das Doppelintegral

$$\iint\limits_{(A)} \frac{x}{2} dA$$

über den Bereich $(A) : y = x^2; 0 \leq x \leq 2$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die folgenden Integrale

a)

$$\int_0^{\pi} (\cos(-x))^2 + (\sin(x))^2 \, dx$$

b)

$$\int_0^{\sqrt{\pi/3}} 2x\sin(3x^2)dx$$

c)

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} e^{ix} + e^{-ix} dx$$

Aufgabe 3

(a) Klassifizieren Sie die Differentialgleichungen

$$y' + 2y = e^{2y} \tag{1}$$
$$y'' - y + 4x = 0 \tag{2}$$
$$F(y^{(3)}, \sin(y), 2x) = 0 \tag{3}$$

(b) Wieviele Lösungen besitzt die DGL (1)?

(c) Wieviele Lösungen besitzt die DGL (2)?

(d) Wieviele Lösungen besitzt das Anfangswertproblem zur DGL (2)

$$y'' - y + 4x \qquad y(0) = -127?$$

Aufgabe 4

Gegeben ist die Differentialgleichung mit Anfangsbedingung

$$y'(x) + \frac{3}{2}y(x) = \frac{9}{2}e^{3x}; \quad y(0) = 1$$

Um was für eine DGL handelt es sich? Lösen Sie die DGL

a) über das Aufsuchen einer partikulären Lösung

b) mit Hilfe der Laplace-Transformation

Aufgabe 5

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'^2 - 2xy' - 2y + 2x^2 = 0$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $y(x) = (x + C)^2 + C^2$, $(x > 0)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

(b) Zeigen sie, dass die Funktion $y(x) = \frac{x^2}{2}$ ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung ist.

(c) Wie nennt man die Lösung in a), wie die Lösung in b)?

Aufgabe 6

Gegeben sei die 2π-periodische Sägezahnfunktion, die durch

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

für $0 \leq x < 2\pi$ und die periodische Fortsetzung definiert ist. Sie genügt den Dirichletschen Bedingungen und kann in eine Fourier-Reihe der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)]$$

entwickelt werden, wobei $a_n = 0$ für $n = 0, 1, 2, 3, ...$ (es handelt sich um eine ungerade Funktion). Berechnen Sie den Fourier-Koeffizienten mit der Nummer zwei (b_2).