Hilfsformeln

Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Euler-Formel

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Laplace-Transformierte:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = F(s) = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(t=0)$$

Aufgabe 1

Gegeben sei ein Bereich $(A): \quad x \geq 0;\ 0 \geq x^2 + y^2 < 4$. Skizzieren Sie den Bereich und berechnen Sie das Doppelintegral über die Funktion $f(x) = x$ innerhalb des Bereichs (A)

$$\iint\limits_{(A)} x dA; \quad x \geq 0; 0 \leq x^2 + y^2 < 4.$$

Welche Art von Koordinaten sind sinnvoll? Warum?

Aufgabe 2

Berechnen Sie die folgenden Integrale

a)

$$\int_0^{\pi} (\cos(-x))^2 + (\sin(x))^2\, dx$$

b)

$$\int_0^{\sqrt{\pi/3}} 2x\sin(3x^2)dx$$

c)

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2x) dx$$

Aufgabe 3

(a) Klassifizieren Sie die Differentialgleichungen

$$y' + 2y = e^{2y} \tag{1}$$

$$y'' - y + 4x = 0 \tag{2}$$

$$F(y^{(3)}, \sin(y), 2x) = 0 \tag{3}$$

(b) Wieviele Lösungen besitzt die DGL (1)?

(c) Wieviele Lösungen besitzt die DGL (2)?

(d) Wieviele Lösungen besitzt das Anfangswertproblem zur DGL (2)

$$y'' - y + 4x \qquad y(0) = -127?$$

Aufgabe 4

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'(x) = \frac{2x}{\cos(y)}.$$

Um was für eine DGL handelt es sich? bestimmen Sie alle Lösungen der DGL.

Aufgabe 5

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0, \qquad x > 0$$

(a) Um was für eine Differentialgleichung handelt es sich?

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = x \ln x$, $(x > 0)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

(c) ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{x}$ ebenfalls eine Lösung?

Aufgabe 6

Gegeben sei die 2π-periodische Sägezahnfunktion, die durch

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

für $0 \leq x < 2\pi$ und die periodische Fortsetzung definiert ist. Sie genügt den Dirichletschen Bedingungen und kann in eine Fourier-Reihe der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)\right]$$

entwickelt werden, wobei $a_n = 0$ für $n = 0, 1, 2, 3, ...$ (es handelt sich um eine ungerade Funktion). Berechnen Sie den Fourier-Koeffizienten mit der Nummer zwei (b_2).

Aufgabe 7

Beim radioaktiven Zerfall ist der Bruchteil dN der Atomkerne eines Nuklids, die sich in einem Zeitintervall dt umwandeln, proportional zur Anzahl N der jeweils vorhandenen radioaktiven Kerne (λ ist die Zerfallskonstante):

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

a) Lösen Sie die DGL durch Integration mit der Randbedingung $N(t = 0) = N_0$

b) Lösen Sie die DGL über eine Laplace-Transformation mit der Randbedingung $N(t = 0) = N_0$.