Hilfsformeln

Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Hilfsintegrale:

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = \begin{cases} \left[\frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)} + \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)}\right]_0^{2\pi} = 0 & \text{für } n \neq m \\ \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4n}\cdot\sin(2nx)\right]_0^{2\pi} = \pi & \text{für } n = m \end{cases}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx = \begin{cases} -\left[\frac{\cos(n-m)x}{2(n-m)} + \frac{\cos(n+m)x}{2(n+m)}\right]_0^{2\pi} = 0 & \text{für } n \neq m \\ \frac{1}{2n}\left[\sin^2(nx)\right]_0^{2\pi} = 0 & \text{für } n = m \end{cases}$$

Laplace-Transformierte:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = F(s) = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(t=0)$$

Aufgabe 1

Gegeben sei ein Bereich $(A):\ 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\ ; \quad y \geq 0$.
Skizzieren Sie den Bereich und berechnen Sie

a) Die Fläche des Bereichs (A).

b) das Doppelintegral über die Funktion $f(x) = y$ innerhalb des Bereichs (A)

$$\iint\limits_{(A)} y dA;\ 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9.$$

Welche Art von Koordinaten sind sinnvoll? Warum?

Aufgabe 2

Berechnen Sie die folgenden Integrale

a)

$$\int 2\left(\cos(x)\right)^2 dx$$

b)

$$\int_0^\pi x\cos(2x)dx$$

c)

$$\int 4xe^{x^2}dx$$

Aufgabe 3

(a) Klassifizieren Sie die Differentialgleichungen

$$y'y + 2y = \sqrt{x} \tag{1}$$

$$y''y + 12y = y\cos(x) \tag{2}$$

$$12y + 3y' - y = 0 \tag{3}$$

(b) Wieviele Lösungen besitzt die DGL (1)?

(c) Wieviele Lösungen besitzt die DGL (3)?

(d) Wieviele Lösungen besitzt das Anfangswertproblem zur DGL (2)

$$y''y + 12y = y\cos(x) \quad ; \quad y(0) = 7?$$

Aufgabe 4

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' - 2x \cdot y = 7x.$$

Um was für eine DGL handelt es sich? bestimmen Sie alle Lösungen der DGL.
Hinweis: das auftretende Integral ist

$$\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

Aufgabe 5

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x,t) - k^2\frac{d^2}{dt^2}y(x,t) = 0,$$

eine lineare, partielle und homogene DGL 2. Ordnung. Zeigen Sie, dass die Funktion $y(x) = A\sin(kx - t)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

Aufgabe 6

Die Funktion $f(x) = \pi \cdot \sin(x)$ ist 2π-periodisch, denn $f(x) = f(x + 2\pi)$. Sie genügt den Dirichletschen Bedingungen und kann in eine Fourier-Reihe der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

entwickelt werden. Führen Sie die Entwicklung durch und geben Sie die Fourier-Reihe an.

Aufgabe 7

Beim radioaktiven Zerfall ist der Bruchteil dN der Atomkerne eines Nuklids, die sich in einem Zeitintervall dt umwandeln, proportional zur Anzahl N der jeweils vorhandenen radioaktiven Kerne (λ ist die Zerfallskonstante):

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

a) Lösen Sie die DGL durch Integration mit der Randbedingung $N(t = 0) = N_0$

b) Lösen Sie die DGL über eine Laplace-Transformation mit der Randbedingung $N(t = 0) = N_0$.