Musterlösung zur Nachklausur 2
Mathematik III
TMM12

02.2014

Aufgabe 1

(a) Substitution $u = x^2$:

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int x \cdot e^{x^2} dx = \int x \cdot e^u \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int e^u du$$

$$= \frac{1}{2} e^u + C.$$

Rücksubstitution: $\displaystyle\int x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

(b) partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin(2x) dx &= \frac{x^2}{2}(-\cos(2x)) - \int 2x \frac{1}{2}(-\cos(2x)) dx \\
&= \frac{x^2}{2}(-\cos(2x)) + \frac{1}{2}\sin(2x) - \int 1 \cdot \frac{1}{2}\sin(2x) dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\sin(2x) - \cos(2x) - (-\frac{1}{2}\cos(2x))\right] + C \\
&= \frac{1}{2}\left[\sin(2x) - \frac{1}{2}\cos(2x)\right] + C
\end{aligned}$$

(c) mit der Stammfunktion oben:

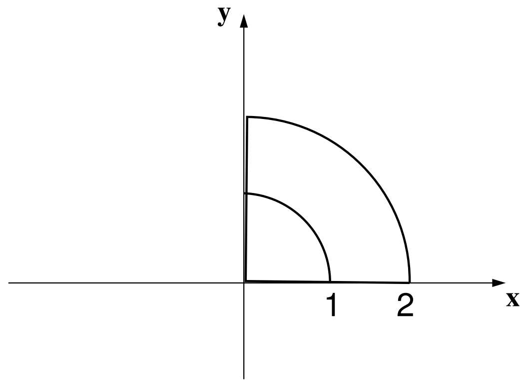
$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2x)dx = \frac{1}{2}\left[\sin(2x) - \frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi/2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}1\right] = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 2

Bei der durch

$$x \geq 0; y \geq 0; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

gegebenen Fläche handelt es sich um einen Viertelkreisring mit den Radien $R_1 = 1$ und $R_2 = 2$:



In Polarkoordinaten (Rotationssymmetrie!)

$$A = \iint dA = \int_{r=1}^{2} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} r dr d\varphi$$
$$= \int_{r=1}^{2} [\varphi]_0^{\pi/2} r dr = \frac{\pi}{2}\int_0^2 r dr = \frac{\pi}{2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{4}\pi.$$

Aufgabe 3

Differentialgleichung

$$xy' + 2y = x^2 - x + 1$$

(a) Die Funktion $y(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2} + \frac{C}{x^2}$, $C \in \mathbb{R}$ ist eine Lösung, wenn sie mit ihren Ableitungen die DGL identisch erfüllt:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2} + \frac{C}{x^2}, \quad C \in \mathbb{R} \\ y'(x) &= \frac{2x}{4} - \frac{1}{3} - \frac{2C}{x^3} \end{aligned}$$

in die DGL:

$$\begin{aligned} xy' + 2y &= x\left(\frac{2x}{4} - \frac{1}{3} - \frac{2C}{x^3}\right) + 2\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2} + \frac{C}{x^2}\right) \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} - \frac{2x}{3} - \frac{2C}{x^2} + \frac{2C}{x^2} + \frac{2}{2} \\ &= x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

(b) Die DGL kann in zwei Schritten gelöst werden:

- Lösung der zughörigen homogenen Gleichung $xy_0' + 2y_0 = 0$ durch Separation der Variablen.
- Lösung der inhomogenen DGL durch Variation der Konstanten oder Aufsuchen einer partikulären Lösung.

Aufgabe 4

Lösung über Sepration der Variablen:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{2x}{\cos(y)} \quad \Longleftrightarrow \quad \cos(y)dy = 2xdx \\ \int \cos(y)dy &= \int 2xdx \\ \sin(y) &= \frac{2}{2}x^2 + C \quad \Rightarrow \quad y(x) = \arcsin\left(x^2 + C\right) \end{aligned}$$

ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Aufgabe 5

Anfangswertproblem:

$$2xy' - y = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \qquad y \to -1 \text{ für } x \to \infty$$

Es handelt sich um eine lineare inhomogene Differentialgleichung 1.Ordnung. Die zugehörige homogene Gleichung $2xy' - y = 0$ kann durch Trennung der Variablen gelöst werden:

$$f(x) = \frac{1}{2x}, \quad y_0 = Ce^{\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx}$$

$$= Ce^{\frac{1}{2}\ln|x|} = Ce^{\ln|\sqrt{x}|} = C \cdot \sqrt{x}$$

Die inhomogene Gleichung wird durch Variation der Konstanten gelöst:

$$\text{Ansatz: } y = C(x)\sqrt{x},$$

$$y' = C'(x)\sqrt{x} + C(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

eingesetzt in die inhomogene Gleichung $2xy' - y = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$ ergibt sich

$$2xC'(x)\sqrt{x} + \underbrace{\frac{2x}{2\sqrt{x}}C(x) - C(x)\sqrt{x}}_{=0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$2xC'(x)\sqrt{x} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$C'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{x^2}$$

$$C(x) = \frac{1}{2}\int x^{-\frac{3}{2}}dx - \int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{2}(-2)x^{-\frac{1}{2}} - (-1)\frac{1}{x} + K$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + K$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet also

$$y(x) = C(x)\sqrt{x} = -1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + K\sqrt{x}$$

Bestimmung der Lösung des Anfangswertproblems (Bestimmung des freien Parameters K): $y \to -1$ für $x \to \infty$:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0 \text{ für } x \to \infty \Longrightarrow -1 + K\sqrt{x} \to -1 \text{ für } x \to \infty$$

$$\Longrightarrow K = 0.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$y(x) = -1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Aufgabe 6

Differentialgleichungen (3 Punkte):

$$y'^2 + 2y - 3x + \sin x = 0 \tag{1}$$
$$y'' = 4x \tag{2}$$

Gleichung	(1)	(2)
linear	-	X
nicht-linear	X	-
homogen	-	-
inhomogen	X	X
Ordnung	1	2

Aufgabe 7

Ausschreiben der Fourierreihe liefert die Lösung über einen einfachen Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx) \\ 12b &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos(x) + b_1 \cdot \sin(x) + a_2 \cdot \cos(2x) + b_2 \cdot \sin(nx) + \ldots \\ &\Rightarrow 12b = \frac{a_0}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = 24b \\ &\Rightarrow a_n = 0 \forall n > 0; \quad b_n = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 8

Das Elektron der Masse m im elektrischen Feld $E = const$ erfährt die Kraft $q \cdot E$, es beschleunigt nach

$$F = m \cdot a \;\Leftrightarrow\; q \cdot E = m\ddot{z(t)}$$

(a) Das Einschalten zum Zeitpunkt $t = 0$ geschieht über die Heaviside-Funktion

$$H : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}, t \to \begin{cases} 0, & \text{falls } t \le 0 \\ 1 & \text{falls } t > 0 \end{cases},$$

also ergibt sich für die zu lösende DGL

$$\frac{d^2}{dt^2}z(t) - \frac{qE}{m}H(t) = 0.$$

oder für $t > 0$

$$\frac{d^2}{dt^2}z(t) - \frac{qE}{m} = 0.$$

(b) Lösung der DGL in zwei Schritten:

$$\ddot{z} = \frac{qE}{m} = K$$

$$\int \ddot{z}dt = \int K dt \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = K \cdot t + C$$

$$\text{mit } \dot{z}(t = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

$$\int \dot{z}dt = K \int t dt \quad \Rightarrow \quad z(t) = K\frac{t^2}{2} + C$$

$$\text{mit } Z(t = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

$$\Rightarrow z(t) = K\frac{t^2}{2} = \frac{qE}{2m}t^2$$