Musterlösung Mathematik II - Übungsblatt 1

Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3\sin(2x - \frac{\pi}{2}) \\
f'(x) &= 3\cos(2x - \frac{\pi}{2}) \cdot 2 = 6\cos(2x - \frac{\pi}{2}) \\
f''(x) &= -6\sin(2x - \frac{\pi}{2}) \cdot 2 = -12\sin(2x - \frac{\pi}{2}) \\
f^{(3)}(x) &= -24\cos(2x - \frac{\pi}{2})
\end{aligned}$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned}
f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{2}) &= 0 \\
\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{2} &= n \cdot \pi \\
2x = n \cdot \pi - \frac{\pi}{2} &= \frac{2n-1}{2}\pi \\
x = \frac{2n-1}{4}\pi &= \left\{ -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots \right\}
\end{aligned}$$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -3$.
Berechnung der Extrema:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 6\cos(2x - \frac{\pi}{2}) = 0 \\
0 &= \cos(2x - \frac{\pi}{2}) \\
2x - \frac{\pi}{2} &= \frac{2n-1}{2}\pi \\
2x &= n\pi \\
x &= \frac{n}{2}\pi \\
f''(\frac{n}{2}\pi) &= -12\sin(2\frac{n}{2}\pi - \frac{\pi}{2}) \\
&= -12\sin(n\pi - \frac{\pi}{2}) = \{-12, 12, -12, 12, \dots\},
\end{aligned}$$

das Vorzeichen der dritten Ableitung wechselt (wechselnde Min./Max.), Maxima für n gerade mit dem Wert $f(n\pi) = 3$, Minima für n ungerade mit dem Wert $f(\frac{2n-1}{2}\pi) = -3$.

Wendepunkte:

$$f^{(3)}(x) = -12\sin(2x - \frac{\pi}{2}) = 0,$$

bis auf den Vorfaktor wie bei der Berechnung der Nullstellen, die Nullpunkte sind gleichzeitig Wendepunkte.

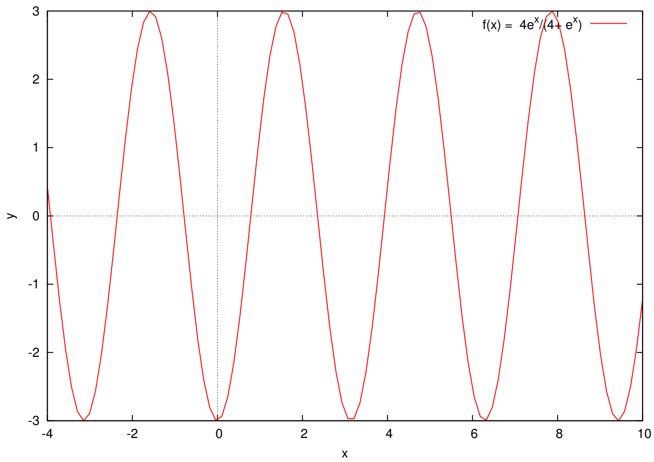

Abbildung 1: $3\sin(2x - \frac{\pi}{2})$

Aufgabe 2

$$f_a(x) = \frac{a \cdot e^x}{a + e^x}, x \in \mathbb{R}, a > 0.$$

a) Es sei $x_2 > x_1$, dann ist die Vermutung, dass

$$\begin{aligned}
f_a(x_2) = \frac{a \cdot e^{x_2}}{a + e^{x_2}} &> f_a(x_1) = \frac{a \cdot e^{x_1}}{a + e^{x_1}} \\
\Leftrightarrow \frac{a + e^{x_2}}{a \cdot e^{x_2}} &< \frac{a + e^{x_1}}{a \cdot e^{x_1}} \\
\frac{a}{a \cdot e^{x_2}} + \frac{1}{a} &< \frac{a}{a \cdot e^{x_1}} + \frac{1}{a} \\
\frac{a}{a \cdot e^{x_2}} &< \frac{a}{a \cdot e^{x_1}} \\
\frac{1}{e^{x_2}} &< \frac{1}{e^{x_1}}. \\
e^{x_2} &> e^{x_1}
\end{aligned}$$

Das ist sicher erfüllt, da $x_2 > x_1$, die Funktion ist also streng monoton wachsend.

Asymptoten: die Funktion hat keine Pole, also untersuchen wir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ae^x}{a+e^x} = a \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{a+e^x} = a \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x} = a$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{ae^x}{a+e^x} = a \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{a+e^x} = a \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{0}{a} = 0$$

Wendepunkt: benötigt wird die zweite Ableitung

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{ae^x(a+e^x) - ae^x e^x}{(a+e^x)^2} \\
&= \frac{a^2e^x + ae^{2x} - ae^{2x}}{(a+e^x)^2} \\
&= \frac{a^2e^x}{(a+e^x)^2} \\
f''(x) &= \frac{a^2e^x(a+e^x)^2 - a^2e^x \cdot 2(a+e^x)e^x}{(a+e^x)^4} \\
&= \frac{a^2e^x(a+e^x) - a^2e^x \cdot 2e^x}{(a+e^x)^3} \\
&= \frac{a^3e^x - a^2e^{2x}}{(a+e^x)^3}
\end{aligned}$$

Der Ausdruck wird nur dann Null, wenn der Zähler Null wird, also

$$\begin{aligned}
a^3e^x - a^2e^{2x} &= 0 \\
ae^x &= e^{2x} \\
a &= e^x \ \Rightarrow x = \ln(a) \text{ mit } f(\ln(a)) = \frac{a}{2}
\end{aligned}$$

b)

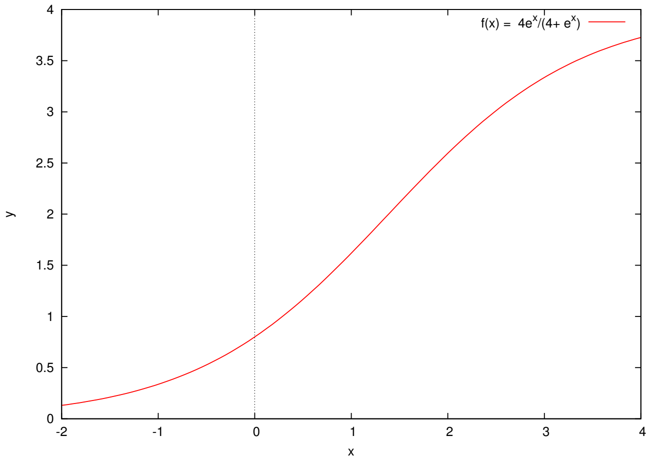

Abbildung 2: $\frac{ae^x}{a+e^x}$ mit $a = 4$

c) Die Kurve K_a schneidet die Gerade $y = 2$, wenn

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ae^x}{a+e^x} = 2 \\ a \cdot e^x &= 2a + 2e^x \\ e^x &= \frac{2a}{a-2} \\ \Rightarrow x &= \ln\left(\frac{2a}{a-2}\right) = \ln(2a) - \ln(a-2), \end{aligned}$$

die Gleichung liefert eine Lösung, wenn $a - 2 > 0$, also $a > 2$.

$$\begin{aligned} x = \ln\left(\frac{2a}{a-2}\right) &> \ln(6) \\ \Rightarrow \frac{2a}{a-2} &> 6 \\ \Rightarrow a &< 3. \end{aligned}$$

Die Abszissen sind also für $2 < a < 3$ größer $\ln(6)$.

d) Die Funktionen $f_a(x)$ und $g_a(x)$ sind strend monoton und damit umkehrbar.

Auflösen nach x liefert

$$\begin{aligned} f(x) = y = \frac{ae^x}{a+e^x} \\ ae^x = ya + ye^x \\ e^x = \frac{ay}{a-y} \; \Rightarrow \; x = \ln\left(\frac{ay}{a-y}\right), \end{aligned}$$

die Umkehrfunktion entsteht daraus durch Vertauschen von x und y:

$$f^{-1}(x) = \frac{ax}{a-x} = g^{-1}(x).$$

Die Umkehrfunktionen existieren, sofern das Argument des Logarithmus größer Null ist, also

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= \frac{ax}{a-x} \text{ definiert für } a - x > 0 \; \Rightarrow x < a \\ g^{-1}(x) &= \frac{ax}{a-x} \text{ definiert für } a - x < 0 \; \Rightarrow x > a \end{aligned}$$

Aufgabe 3

$$f(x) = \sqrt{x^2+x} = \left(x^2+x\right)^{\frac{1}{2}}$$

Der Definitionsbereich D_f ist $\mathbb{R}$, da die Funktion auch komplex $f(x) \in \mathbb{C}$ sein darf. Asymptoten besitzt die Funktion u.U. an den Rändern

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x} = +\infty \end{aligned}$$

Es existieren keine Asymptoten.

Achsenschnittpunkte: Es ist $f(0) = 0$, Nullstellen:

$$f(x) = \sqrt{x^2+x} = \sqrt{x(x+1)} = 0$$

Eine Lösung ist $x_0 = 0$ (bereits bekannt, eine weitere ist $x_1 = -1$. Extrema:

$$\begin{aligned} f''(x) = \frac{1}{2}\left(x^2+x\right)^{-\frac{1}{2}}(2x+1) = 0 \\ \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \; \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung wird nicht benötig, da $f(x = 1/2)$ komplex (komplexe Zahlenn lassen sich nicht vergleichen, es existieren keine Extrema). e Differenzierbarkeit an den Rändern: wir untersuchen die Grenzwerte

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f'(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\left(x^2+x\right)^{-\frac{1}{2}}(2x+1) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x} = 1 \\
\lim_{x\to-\infty} f'(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}\left(x^2+x\right)^{-\frac{1}{2}}(2x+1) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2\sqrt{x^2}} = -1.
\end{aligned}$$

Die Grenzwerte existieren, die Funktion ist an den Rändern differenzierbar.