Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a)

$$\int x \cdot e^{x^2} dx$$

b)

$$\int x^2 \sin(2x) dx$$

c)

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2x) dx$$

(10 Punkte)

Aufgabe 2

Skizzieren Sie die durch

$$x \geq 0; y \geq 0; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

gegebene Fläche und berechnen Sie den Flächeninhalt über ein Doppelintegral.
(6 Punkte)

Aufgabe 3

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$xy' + 2y = x^2 - x + 1$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$y(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2} + \frac{C}{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}$$

eine Lösung der Differentialgleichung ist.

(b) Wie lässt sich die Differentialgleichung lösen (ohne Berechnung)?

(6 Punkte)

Aufgabe 4

Finden Sie alle Lösungen der DGL

$$y'(x) = \frac{2x}{\cos(y)}.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 5

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$2xy' - y = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \qquad y \to -1 \text{ für } x \to \infty$$

durch Berechnung der Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und Variation der Konstanten.
(11 Punkte)

Aufgabe 6

Um welche Art von Differentialgleichungen handelt es sich bei den folgenden zwei Beispielen?

$$y'^2 + 2y - 3x + \sin x = 0 \tag{1}$$
$$y'' = 4x \tag{2}$$

Gleichung	(1)	(2)
linear	□	□
nicht-linear	□	□
homogen	□	□
inhomogen	□	□
Ordnung	___	___

(3 Punkte)

Aufgabe 7

Die Funktion $f(x) = 12b$ kann wegen $f(x) = f(x + 2\pi)\forall x \in \mathbb{R}$ als 2π-periodisch betrachtet werden, sie genügt außerdem den Dirichletschen Bedingungen und kann in eine Fouriereihe der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)$$

entwickelt werden. Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten a_n und b_n.
(6 Punkte)

Aufgabe 8

Ein Elektron bewege sich im statischen und homogenen elektrischen Feld $E(z) = E$. Das Elektron startet bei $t = 0$ am Ort $z = 0$, die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ beträgt $\dot{z}(t = 0) = 0$. Auf das Elektron wirkt stets die Kraft $F = q \cdot E$ (mit q: Ladung des Elektrons).

(a) Wie sieht die Differentialgleichung zur Bestimmung der Bahn $z(t)$ aus, wenn die Gravitation vernachlässigt wird?

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung für die Bahnkurve $z(t)$ des Elektrons unter den oben gegebenen Randbedingungen.

(8 Punkte)