Musterlösung zur Nachklausur Mathematik 1 TMM12

M. Oettinger 16.5.2011

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 54, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(11 Punkte):

$$
\begin{aligned}
AB &= 5 \\
BA &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\
CD &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 16 & 3 & 11 \end{pmatrix} \\
DC &\text{ existiert nicht.} \\
BC &\text{ existiert nicht.} \\
CB &= \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \\
DB &\text{ existiert nicht.}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

(10 Punkte):
$f :]0, \infty[\longmapsto \mathbb{R}, x \longmapsto \ln(x) + x$.

a) $u(x) = \ln(x)$ ist streng monoton steigend, $v(x) = x$ ist streng monoton steigend $\Rightarrow$ die Summe $u + v$ ist ebenfalls streng monoton steigend und deshalb umkehrbar.

b) Grenzwert für $x \to 0+$:

$$\lim_{x\to 0+} \ln(x) + x = \lim_{x\to 0+} \ln(x) + \lim_{x\to 0+} x = \lim_{x\to 0+} \ln(x) + 0 = \lim_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty$$

f besitzt keinen Grenzwert. Für $x < 0$ ist $\ln(x)$ nicht definiert, für große x steigen $\ln(x)$ und x bis ins Unendliche.

c) Skizze:

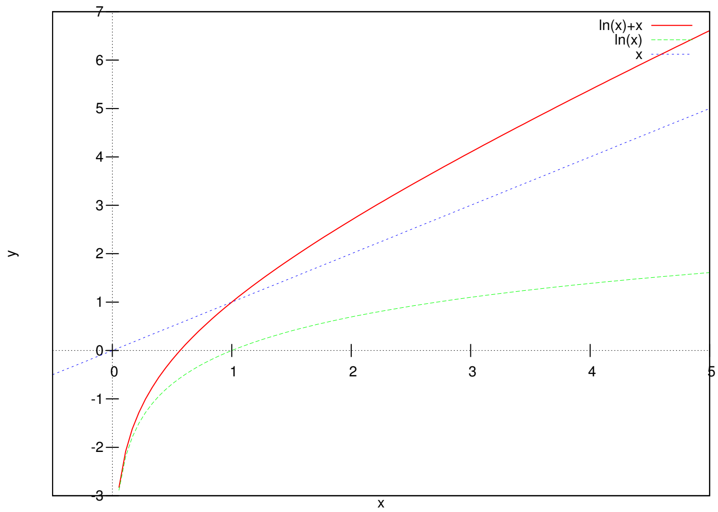

Abbildung 1: Skizze der Funktion $\ln(x) + x$

Aufgabe 3

(8 Punkte):

	$\sin(x)/x$	$x^2/7$	x^3	$3/x$
stetig	j	j	j	n
differenzierbar	j	j	j	n
monoton	n	n	j	n
Nullstelle(n)n	j	j	j	n

Aufgabe 4

(8 Punkte):

a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{(\sqrt{x}+1)\cdot x} = \frac{\lim_{x\to 1} x+1}{\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)\cdot \lim_{x\to 1} x} = \frac{2}{2} = 1$$

b)

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad > 0 \\ -1 & \text{für} \quad < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0+} f(x) = 1, \lim_{x\to 0-} f(x) = -1$$

$\Rightarrow$ der Grenzwert existiert nicht.

c) mit der Reihendarstellung des Sinus:

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots = x\left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \dots\right)$$

folgt sofort

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{x\left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \dots\right)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \dots\right) = 1$$

Aufgabe 5

(9 Punkte):
Algebraische Normalform:

$$z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})) = 3\cdot(0+i) = 3i.$$

Mit $z_2 = 2 + i\cdot 3$:

$$z_1 - z_2 = 3i - (2+3i) = -2.$$

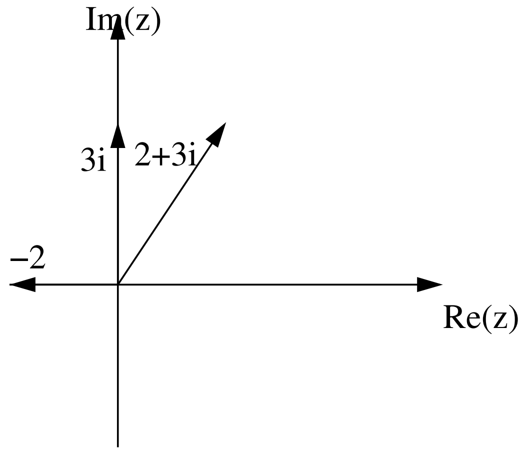

Abbildung 2: Darstellung von z_1, z_2 und $z_1 - z_2$ in der Gaußschen Zahlenebene

Aufgabe 6

(8 Punkte)

a)

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x^2-1}+x &= 0\\
\sqrt{2x^2-1} &= -x\\
2x^2-1 &= x^2\\
&\Rightarrow x_{1/2} = \pm 1
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{4-x}{x+2}} \in \mathbb{R}, \text{ wenn } \frac{4-x}{x+2} > 0\\
&4-x > 0 \Rightarrow x < 4\\
&x+2 > 0 \Rightarrow x > -2
\end{aligned}$$

Die Werte der Wurzel sind reell für $-2 < x < 4$.