Aufgabe 1

Gegeben ist die Relation

$$r(x) = \frac{1}{|5(x-2)^3|}$$

mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$.

(a) Handelt es sich um eine Funktion? Schreiben Sie $r(x)$ in betragsfreier Form und untersuchen Sie die Relation auf Symmetrie. (3 Punkte)

(b) Untersuchen Sie $r(x)$ an der Stelle $x_0 = 2$ auf Stetigkeit. (3 Punkte)

(c) Wie verhält sich $r(x)$ für große/kleine Variablenwerte? (2 Punkte)

(d) Skizzieren Sie $r(x)$ mit Definitionsbereich $D = [-1; 5]$. (2 Punkte)

Aufgabe 2

(7 Punkte):
Gegeben sei die Funktion $f :]0, \infty[\longmapsto \mathbb{R}, x \longmapsto \ln(x) + x$.

a) Warum ist f auf dem gesamten Definitionsbereich umkehrbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Ist die Funktion stetig?

c) Besitzt die Funktion einen Grenzwert für $x \to 0+$? Wenn ja, welchen?

Aufgabe 3

(4 Punkte)
Untersuchen Sie die unendliche Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{k}+1)^2}{k^2 + \sqrt{k^4 - 1}}$$

auf Konvergenz.

Aufgabe 4

(8 Punkte):
Welche der in der Tabelle angegebenen Eigenschaften besitzen die angegebenen Funktionen, wenn man als Definitionsbereich ganz $\mathbb{R}$ annimmt?

	$\sin(x)/x$	$x^2/7$	x^3	$3/x$
stetig				
differenzierbar				
monoton				
Nullstelle(n)n				

Aufgabe 5

(7 Punkte):
Bestimmen Sie die Grenzwerte

a)
$$\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{(\sqrt{x}+1) \cdot x}$$

b)
$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

Aufgabe 6

(9 Punkte):
Rechnen Sie die folgende komplexe Zahl in ihre algebraische Normalform ($z = a + ib$) um:
$$z_1 = 5 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Berechnen Sie die Differenz von z_1 und $z_2 = 2 + i \cdot 3$ und stellen Sie z_1, z_2 und $z_1 - z_2$ als Vektoren in der Gaußschen Zahlenebene dar.

Aufgabe 7

(9 Punkte):

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{2x^2 - 1} + x = 0$$

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ erhält man reelle Werte der Wurzel

$$\sqrt{\frac{4-x}{x+2}}$$