

# Musterlösungen Mathematik III

## 1. Integration

(a)

$$\int_0^{2\pi} e^x \sin(x) dx$$

Partielle Integration mit  $u' = e^x \implies u = e^x$  und  $v = \sin(x) \implies v' = \cos(x)$ :

$$\int_0^{2\pi} e^x \sin(x) dx = [e^x \sin(x)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^x \cos(x) dx$$

Das Integral auf der rechten Seite wird ebenfalls partiell integriert ( $u' = e^x \implies u = e^x$  und  $v = \cos(x) \implies v' = -\sin(x)$ ):

$$\int_0^{2\pi} e^x \cos(x) dx = [e^x \cos(x)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} e^x \sin(x) dx$$

eingesetzt ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} e^x \sin(x) dx = [e^x \sin(x)]_0^{2\pi} - [e^x \cos(x)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^x \sin(x) dx$$

$$2 \cdot \int_0^{2\pi} e^x \sin(x) dx = [e^x \sin(x) - e^x \cos(x)]_0^{2\pi}$$

$$\int_0^{2\pi} e^x \sin(x) dx = \frac{1}{2} [e^x (\sin(x) - \cos(x))]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} e^{2\pi} (0-1) - \frac{1}{2} (0-1) = \frac{1}{2} (1 - e^{2\pi})$$

(b)

$$\int_0^2 (\sqrt{5-2y})^{-3} dy$$

Lösung durch Substitution  $u = 5 - 2y \implies du = -2dy$ :

$$\int_0^2 (\sqrt{5-2y})^{-3} dy = \int_a^b u^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{2} \left[ u^{\frac{5}{2}} \right]_a^b$$

(es werden wieder die Originalgrenzen verwendet). Rücksubstitution liefert

$$-\frac{1}{5} \left[ (5-2y)^{\frac{5}{2}} \right]_0^2 = -\frac{1}{5} \left( 1 - 5^{\frac{5}{2}} \right)$$

## 2. Doppelintegrale

(a)

$$\iint_{(A)} (3x + 4y^2) dx dy (A) : y \geq 0; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4.$$

$R^2 = x^2 + y^2$  beschreibt einen Kreis in der  $x, y$ -Ebene. Berechnung des Integrals erfolgt in Polarkoordinaten durch Integration über  $\varphi$  in Grenzen von 0 bis  $\pi$  und  $r$  von 1 bis 2.  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  und  $dA = r dr d\varphi$ , also

$$\begin{aligned} \iint_{(A)} (3x + 4y^2) dx dy &= \iint_{(A)} (3r \cos \varphi + 4(r \sin \varphi)^2) r dr d\varphi \\ &= \int_0^\pi \int_1^2 3r^2 \cos \varphi dr d\varphi + \int_0^\pi \int_1^2 4r^3 \sin^2 \varphi dr d\varphi \\ &= \int_0^\pi [r^3]_1^2 \cos \varphi d\varphi + \int_0^\pi [r^4]_1^2 \sin^2 \varphi d\varphi = 7 \int_0^\pi \varphi d\varphi + 15 \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi \end{aligned}$$

### 3. Differentialgleichung

(a)

$$\frac{du(t)}{dt} = -(u(t))^2 + u(t) + 2u(t)t^2 + 2t - t^2 - t^4$$

$u(t) = 1 + t^2$  eingesetzt:

$$\frac{du(t)}{dt} = -(1 - t^2)^2 + 1 + t^2 + 2(1 + t^2)t^2 + 2t - t^2 - t^4$$

$$-1 + 1 - 2t^2 + t^2 + 2t^2 - t^2 - t^4 + 2t^4 - t^4 + 2t = 2t$$

$u(t) = 1 + t^2$  abgeleitet:

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(1 + t^2) = 2t$$

### 5. Differentialgleichungen

(a)  $y' = x + 1$ , Anfangsbedingung  $y(-2) = -1$ :

Trennung der Variablen

$$\frac{dy}{dx} = x + 1 \implies dy = (x + 1)dx$$

Integration liefert die allgemeine Lösung der DGL:

$$\int dy = \int (x + 1)dx \implies y = \frac{1}{2}x^2 + x + C.$$

Bestimmung der Konstanten  $C$  aus der Anfangsbedingung  $y(-2) = -1$ :

$$y(-2) = \frac{1}{2}(-2)^2 - 2 + C = -1 \implies C = -1$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=0}$

Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y = \frac{1}{2}x^2 + x - 1.$$

FIXME Plot der Fkt!!

(b)  $y' = 0,5(3 - y)$ , Anfangsbedingung  $y(0) = 2$  Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3 - y) \implies \frac{dy}{y - 3} = -\frac{1}{2}dx.$$

Lösung der allgemeinen DGL:

$$\int \frac{dy}{y - 3} = -\frac{1}{2} \int dx \implies \ln |y - 3| = -\frac{x}{2} + \ln |C|$$

$$y - 3 = C \cdot e^{\frac{x}{2}} \implies y = 3 + C \cdot e^{\frac{x}{2}}.$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(0) = 3 + C \cdot e^{\frac{0}{2}} = 2 \implies C = -1$$

$$y(x) = 3 - C \cdot e^{\frac{x}{2}}$$

(c)  $y(1 - x^2)y' - x(1 - y^2) = 0$  Trennung der Variablen:

$$\frac{ydy}{1 - y^2} = \frac{xdx}{1 - x^2}$$

Substitution vereinfacht die Integrale:  $u = 1 - y^2$ ,  $du = -2ydy$  und  $v = 1 - x^2$ ,  $dv = -2xdx$ , also

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dv}{v} \implies \ln |u| = \ln |v| + \ln |C|.$$

Rücksubstitution liefert

$$\ln |1 - y^2| = \ln |1 - x^2| + \ln |C| \implies 1 - y^2 = 1 - x^2 + C$$

$$\implies y^2 = 1 - C(1 - x^2)$$

(d)  $(x^2 - 1)y' = 2y$  Trennung der Variablen:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x^2 - 1}$$

Integration durch Partialbruchzerlegung: Nullstellen des Nenners sind  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -1$ .

$$\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$$

$$\ln |y| = \ln |x - 1| - \ln |x + 1| + \ln |C| = \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + \ln |C|$$

$$\implies y = C \cdot \frac{x - 1}{x + 1}$$

## 6. Fourierzerlegung

Die Fourier-Reihe ist mit der Funktion identisch

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

für die  $2\pi$ -periodische Funktion

$$\begin{aligned} f(x) &= 3,74 + 1,5 \cdot \sin(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \\ &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + \dots \end{aligned}$$

Bei Koeffizientenvergleich bleiben lediglich zwei Fourierkoeffizienten, die nicht verschwinden:

$$\frac{a_0}{2} = 3,74 \implies a_0 = 7,48$$

$$b_1 \sin(x) = 1,5 \cdot \sin(x) \implies b_1 = 1,5$$