

Musterlösung zur Klausur Mathematik 3 TMK09/TMX09

M. Oettinger 23.12.2010

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

Integrale (7+4+3 Punkte):

(a)

$$\int \frac{3}{2(x^2 - 1)} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

Partialbruchzerlegung: Nullstellen des Nenners sind $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}$$

$$\implies A(x + 1) + B(x - 1) = 1$$

Nullstellen eingesetzt $\implies A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, also

$$\frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{2} \frac{1}{x - 1} dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{2} \frac{1}{x + 1} dx$$

$$= \frac{3}{4} \ln |x - 1| - \frac{3}{4} \ln |x + 1| + C$$

$$= \frac{3}{4} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + C$$

(b) $\int x^4 \ln(2x) dx$

Partielle Integration mit $u' = x^4 \Rightarrow u = x^5/5$ und $v = \ln(2x) \Rightarrow v' = 1/x$:

$$\begin{aligned} \int x^4 \ln(2x) dx &= \frac{x^5}{5} \ln(2x) - \int \frac{x^5}{5} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^5}{5} \ln(2x) - \int \frac{x^4}{5} dx = \frac{x^5}{5} \ln(2x) - \frac{1}{5} \frac{x^5}{5} + C \\ &= \frac{x^5}{5} \left(\ln(2x) - \frac{1}{5} \right) + C \end{aligned}$$

(c) Trick: $\ln(x) = 1 \cdot \ln(x)$, partielle Integration mit $u' = 1 \Rightarrow u = x$ und $v = \ln(x) \Rightarrow v' = 1/x$:

$$\int 1 \cdot \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - x + C$$

Aufgabe 2

Doppelintegral des halben Kreisringes (in Polarkoordinaten) (4 Punkte):

$$\iint_{(A)} dA; \quad y \geq 0; 4 \leq x^2 + y^2 < 9.$$

$$\iint_{(A)} dA = \int_{r=2}^3 \int_{\varphi=0}^{\pi} r dr d\varphi = \int_{r=2}^3 \pi r dr = \pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_2^3 = \pi \frac{9-4}{2} = \pi \frac{5}{2}$$

Aufgabe 3

Differentialgleichung (1+3+3 Punkte)

(a) Lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung

(b)

$$x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0, \quad x > 0$$

$f(x) = x \ln x$, ($x > 0$) ist eine Lösung der Differentialgleichung, wenn sie mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung identisch erfüllt.

$$y = x \ln x \implies y' = \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1 \implies y'' = \frac{1}{x}$$

eingesetzt in die Differentialgleichung:

$$x^2 \cdot \frac{1}{x} - x(\ln x + 1) + x \ln x = 0$$

(c)

$$f(x) = -\frac{1}{x}, f'(x) = \frac{1}{x^2}, f''(x) = -\frac{2}{x^3}$$

einsetzen in die Gleichung liefert

$$-x^2 \frac{2}{x^3} - x \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \neq 0$$

$f(x)$ ist keine Lösung.

Aufgabe 4

Trennung der Variablen (4 Punkte):

$$y' = y^2 \cdot (\sin x + 1)$$

$$\frac{dy}{y^2} = (\sin x + 1)dx \quad y \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int (\sin x + 1)dx$$

$$-\frac{1}{y} = -\cos x + x + C$$

$$y = \frac{1}{\cos x - x - C}$$

Eine zusätzliche Lösung ist $y(x) = 0$.

Aufgabe 5

Anfangswertproblem (10 Punkte):

$$2xy' - y = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \quad y \rightarrow -1 \text{ für } x \rightarrow \infty$$

Es handelt sich um eine lineare inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung. Die zugehörige homogene Gleichung $2xy' - y = 0$ kann durch Trennung der Variablen gelöst werden:

$$f(x) = \frac{1}{2x}, \quad y_0 = C e^{\frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx}$$

$$= C e^{\frac{1}{2} \ln|x|} = C e^{\ln|\sqrt{x}|} = C \cdot \sqrt{x}$$

Die inhomogene Gleichung wird durch Variation der Konstanten gelöst:

$$\text{Ansatz: } y = C(x)\sqrt{x},$$

$$y' = C'(x)\sqrt{x} + C(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

eingesetzt in die inhomogene Gleichung $2xy' - y = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$ ergibt sich

$$2xC'(x)\sqrt{x} + \underbrace{\frac{2x}{2\sqrt{x}}C(x) - C(x)\sqrt{x}}_{=0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$2xC'(x)\sqrt{x} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$C'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{x^2}$$

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{1}{2} \int x^{-\frac{3}{2}} dx - \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2}(-2)x^{-\frac{1}{2}} - (-1)\frac{1}{x} + K \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + K \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet also

$$y(x) = C(x)\sqrt{x} = -1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + K\sqrt{x}$$

Bestimmung der Lösung des Anfangswertproblems (Bestimmung des freien Parameters K): $y \rightarrow -1$ für $x \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \infty \implies -1 + K\sqrt{x} \rightarrow -1 \text{ für } x \rightarrow \infty$$

$$\implies K = 0.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$y(x) = -1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Aufgabe 6

Differentialgleichungen (3 Punkte):

$$y'^2 + 2y - 3x + \sin x = 0 \quad (1)$$

$$y'' = 4x \quad (2)$$

Gleichung	(1)	(2)
linear	-	X
nicht-linear	X	-
homogen	-	-
inhomogen	X	X
Ordnung	1	2

Aufgabe 7

$f(x) = 4$ soll in eine Fourierreihe entwickelt werden (3 Punkte):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

$$f(x) = 4 = \frac{a_0}{2} + a_1 \sin(x) + b_1 \cos(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + \dots$$

Ein simpler Koeffizientenvergleich liefert

$$4 = \frac{a_0}{2} \quad 0 = a_n \sin(nx); 0 = b_n \cos(nx) \quad \forall n > 0$$

$$\implies a_0 = 2 \cdot 4 = 8 \quad a_n = 0; b_n = 0 \quad \forall n > 0$$

Aufgabe 8

(2+7+1 Punkte)

(a) Skizze der Werte:

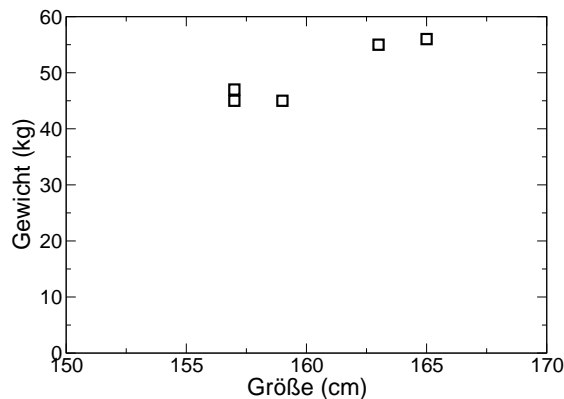


Abbildung 1: Das Gewicht von Schülern unterschiedlicher Größe.

- (b) Anpassen der Funktion $y(x) = a + b \cdot x$ an gemessene Werte: die Minimierung der quadratischen Abweichungen vom arithmetischen Mittelwert liefert für die Steigung b

$$b = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

und für den Achsenabschnitt

$$a = b \cdot \bar{x} - \bar{y}$$

n	x_i	y_i	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$
1	157	45	-3,2	-4,6	10,24	14,72
2	157	47	-3,2	-2,6	10,24	8,32
3	159	45	-1,2	-4,6	1,44	5,52
4	163	55	2,8	5,4	7,84	15,12
5	165	56	4,8	6,4	23,04	30,72
Summe	801	248	0,00	0,00	52,80	74,40
Mittel	160,2	49,6				

Daraus ergibt sich für das Körpergewicht y der Schüler im Beispiel

$$y(x) = -176,14 + 1,4091 \cdot x, \quad y \text{ in kg, } x \text{ in cm.}$$

(c) Gewicht eines Schülers mit 195,97cm Körpergröße:

$$y(x = 196,7) = -176,14 \text{ kg} + 1,4091 \cdot 195,97 \text{ kg/cm} = 100\text{kg}$$