

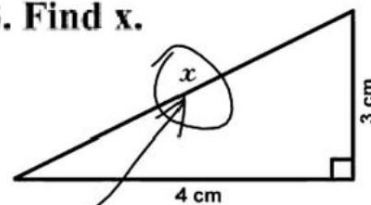
Übungsklausur Mathematik III

TMK09 / TMX09

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

3. Find x.



Here it is

Aufgabe 1

(6 + 4 + 5 Punkte)

- a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung des Sinus den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(x))^x$$

(Hinweis: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$).

- b) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n}{2n+1}$ gegen den Grenzwert $g = \frac{1}{2}$ konvergiert

- c) und dass $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 2

(5 Punkte)

Arno Nym verhandelt mit seiner Oma Mira Nym (geborene Bellenbaum) über sein Taschengeld. Oma Mira bietet eine Einmalzahlung von 20,- und die Zahlung von 10,- bei jedem weiteren Besuch. Arno hätte gern sofort 0,50, beim nächsten Besuch 1,- gefolgt von 1,50 beim übernächsten Besuch, also bei jedem Besuch eine Steigerung um -,50.

Wieviele Besuche der Oma müssen vergehen, bis Arno gegenüber der Version seiner Oma gewinnt?

Aufgabe 3

(5 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe der Euler-Relation

$$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$

die Potenzreihen des Sinus und des Kosinus.

Aufgabe 4

(5 Punkte)

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Aufgabe 5

(8 Punkte)

Gegeben sind die Gerade E und die Gerade g :

$$E : 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \quad g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene.
- Schneidet die Ebene E die x_2 -Achse?

Aufgabe 6

(7 Punkte)

Gegeben sind die Matrix A und der Vektor x mit

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden Größen: $A \cdot x$, $x \cdot A$, $x^T \cdot A$ und $A^2 (= A \cdot A)$.

Aufgabe 7

(10 Punkte)

Welche der Relationen

$$(1) : f(x) = \sqrt[3]{x} \quad (2) : g(x) = \sqrt{x} \quad (3) : h(x) = (|x|)^{\frac{1}{2}} \quad (4) : k(x) = |x|$$

sind im Definitionsbereich $D = [0; \infty]$ Funktionen? Warum?

Wie sieht die Funktion oder Relation $f(x) = \sqrt[3]{x}$ aus (Skizze!), wo hat sie Nullstellen (keine Berechnung!)? Warum wird auch die (nicht komplexe) dritte Wurzel in vielen Schulbüchern nicht definiert?