Musterlösung zur Übungsklausur
Mathematik III
TMM11

13.12.2012

Aufgabe 1

(a) $f(x) = 2x^2 \cdot e^x$:

$$\begin{aligned}
\int 2x^2 \cdot e^x dx &= 2x^2 e^x - \int 4xe^x dx \\
&= 2x^2 e^x - \left[4xe^x - \int 4e^x dx\right] \\
&= 2x^2 e^x - 4xe^x + 4e^x + C = (2x^2 - 4x + 4)e^x + C
\end{aligned}$$

(b) $\frac{2\sqrt{5}}{x^2-5}$ Partialbruchzerlegung:

$$\int \frac{2\sqrt{5}}{x^2-5} dx = \int \frac{2\sqrt{5}}{(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})} dx$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})} = \frac{A}{x+\sqrt{5}} + \frac{B}{x-\sqrt{5}} = \frac{A(x-\sqrt{5}) + B(x+\sqrt{5})}{(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})}$$

$$\Rightarrow A = -B \quad B = 1$$

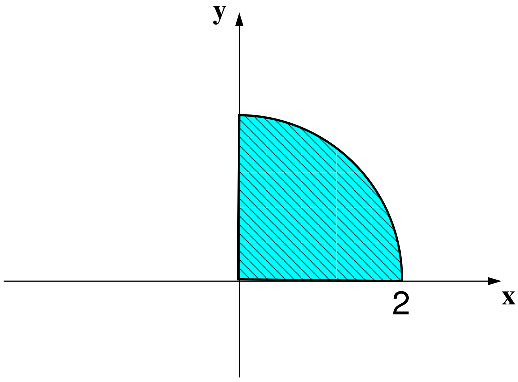
$$\begin{aligned}
\int \frac{2\sqrt{5}}{x^2-5} dx &= \int \frac{-1}{x+\sqrt{5}} dx + \int \frac{1}{x-\sqrt{5}} dx \\
&= \ln|x-\sqrt{5}| - \ln|x+\sqrt{5}|
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Bei der durch

$$x \geq 0; y \geq 0; 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

gegebenen Fläche handelt es sich um einen Viertelkreis mit Radius $R = 2$:



In Polarkoordinaten (Rotationssymmetrie!)

$$\begin{aligned} A = \iint dA &= \int_{r=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} r dr d\varphi \\ &= \int_{r=0}^{2} [\varphi]_0^{\pi/2} \, r dr = \frac{\pi}{2} \int_0^2 r dr \qquad = \frac{\pi}{2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^2 = \pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Differentialgleichung

$$y'^2 - 2xy' - 2y + 2x^2 = 0$$

(a) $y(x) = (x+C)^2 + C^2$, $(x > 0)$ ist eine Lösung der DGL, wenn sie mit ihren Ableitungen die DGL identisch erfüllt:

$$\begin{aligned} y &= (x + C)^2 + C^2 = x^2 + 2xC + 2C^2 \\ y' &= 2x + 2C \end{aligned}$$

in die DGL:

$$\begin{aligned} &(2x + 2C)^2 - 2x(2x + 2C) - 2(x^2 + 2xC + 2C^2) + 2x^2 \\ =&(4x^2 - 8xC + 4C^2 - 4x^2 - 4xC - 2x^2 - 4xC - 4C^2 + 2x^2 \\ =&0 \end{aligned}$$

(b) $y(x) = x^2/2$ ist eine Lösung der DGL, wenn sie mit ihren Ableitungen die DGL identisch erfüllt:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2}{2} \\ y' &= \frac{2}{2}x = x \end{aligned}$$

in die DGL:

$$x^2 - 2xx - 2\frac{x^2}{2} + 2x^2 = x^2 - 2x^2 - x^2 + 2x^2 = 0$$

(c) Die Lösung in a) enthält einen freien Parameter, sie ist die allgemeine Lösung der DGL $y'^2 - 2xy' - 2y + 2x^2 = 0$. Die Lösung in b) ist eine spezielle (oder partikuläre Lösung).

Aufgabe 4

$$y' = 2x \cdot (y(x))^2$$

ist von der Form $y' + f(x) \cdot g(y) = 0$, man erkennt sofort die triviale Lösung $y(x) = 0$. Die DGL kann über Separation der Variablen gelöst werden:

$$\begin{aligned} y' &= 2x \cdot (y(x))^2 \\ \frac{dy}{dx} &= 2x \cdot y^2 \\ \frac{dy}{y^2} &= 2x \cdot dx \\ \int \frac{1}{y^2} dy &= \int 2x dx \\ -\frac{1}{y} &= \frac{2}{2}x^2 + C \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = \frac{1}{C - x^2}$$

Aufgabe 5

(a) allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = 2y + e^{2x}$$

Die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung

$$y' - 2y = 0$$

ist

$$\begin{aligned} \frac{dy_0}{y_0} &= 2dx \\ \ln|y_0| &= 2x + \ln|C| \;\Rightarrow\; y_0(x) = Ce^{2x} \end{aligned}$$

Ansatz für die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL: $y(x) = C(x)e^{2x}$, $y'(x) = C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x}$. Einsetzen in die DGL:

$$\begin{aligned} C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x} - 2C(x)e^{2x} &= e^{2x} \\ C'(x) &= 1 \;\Rightarrow\; C(x) = x + c \\ y(x) &= C(x)e^{2x} = (x+c)e^{2x} \end{aligned}$$

(b) Anfangswertproblem

$$y(0) = (0+c)e^0 = c = 22$$

Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(x) = (x+22)e^{2x}$$

Aufgabe 6

(a)

$$y' + 2y = e^{2y} \tag{1}$$

$$y'' - y + 4x = 0 \tag{2}$$

Gleichung (1) ist eine nichtlineare, homogene und gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung.
Gleichung (2) ist eine lineare, inhomogene und gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung.

(b) Die allgemeine Lösung der DGL (1) enthält (DGL 1. Ordnung) einen freien Parameter - sie hat unendliche viele Lösungen.

(c) Die allgemeine Lösung der DGL (2) enthält (DGL 2. Ordnung) zwei freie Parameter - sie hat unendliche viele Lösungen.

(d) Durch die Randbedingung wird einer der beiden freien Parameter festgelegt, es bleiben noch immer unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 7

Bestimmung des Fourier-Koeffizienten b_1 für die 2π-periodische Sägezahnfunktion $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ für $0 \leq x < 2\pi$.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \\
b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(x) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin(x) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{2} \sin(x) dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x}{2} \sin(x) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[-\cos(x)\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \left[\sin(x) - x\cos(x)\right]_0^{2\pi} \\
&= -\frac{1}{2\pi}(-2\pi) = 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 8

Das Elektron der Masse m im elektrischen Feld $E = const$ erfährt die Kraft $q \cdot E$, es beschleunigt nach

$$F = m \cdot a \;\Leftrightarrow\; q \cdot E = mz(\ddot{t})$$

(a) Das Einschalten zum Zeitpunkt $t = 0$ geschieht über die Heaviside-Funktion

$$H : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}, t \to \begin{cases} 0, \text{ falls } t \leq 0 \\ 1 \text{ falls } t > 0 \end{cases},$$

also ergibt sich für die zu lösende DGL

$$\frac{d^2}{dt^2}z(t) - \frac{qE}{m}H(t) = 0.$$

(b) Die DGL lässt sich mit Hilfe der angegebenen Laplace-Transformierten von $H(t)$ und der zweiten Ableitung direkt transformieren:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}z(t)\right\} &= \frac{qE}{m}\mathcal{L}\{H(t)\} \\ s^2\mathcal{L}\{z(t)\} - sz(0) - \left.\frac{dz}{dt}\right|_0 &= \frac{qE}{m}\frac{1}{s} \\ s^2 Z(s) - s \cdot 0 - 0 &= \frac{qE}{m}\frac{1}{s} \\ Z(s) &= \frac{qE}{m}\frac{1}{s^3} \end{aligned}$$

Durch Rücktransformation der Funktion $Z(s)$ (inverse Laplace-Transformation) erhält man sofort die Lösung des Problems:

$$z(t) = \frac{qE}{m}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{qE}{m}\frac{t^2}{2}$$