Musterlösung zur Klausur Mathematik 2 TMM11

M. Oettinger 28.6.2012

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(6 Punkte)

$$
\begin{aligned}
K(v) &= \frac{a^2 v}{v^2 + b^2}, v > 0 \\
\Rightarrow K'(v) &= \frac{a^2(v^2 + b^2) - a^2 v 2v}{(v^2 + b^2)^2} \\
&= \frac{a^2 v^2 + a^2 b^2 - 2a^2 v^2}{(v^2 + b^2)^2} \\
&= \frac{a^2 b^2 - a^2 v^2}{(v^2 + b^2)^2}
\end{aligned}
$$

Zur Bestimmung des Maximums wird die erste Ableitung Null gesetzt:

$$
\begin{aligned}
K'(v) = \frac{a^2 b^2 - a^2 v^2}{(v^2 + b^2)^2} &= 0 \Leftrightarrow a^2 b^2 - a^2 v^2 = 0 \\
\Leftrightarrow v^2 &= b^2
\end{aligned}
$$

Weil $v > 0$, ist die positive Lösung der Wurzel

$$v = +\sqrt{b^2}$$

korrekt. Die negative Lösung bedeutet hier einfach eine Geschwindigkeit in die Gegenrichtung.

Aufgabe 2

(7 Punkte)
Gleichung der Tangente $t(x)$ an die Kurve $f(x) = x^3 + 2\sin x - x^2 \cos x$ im Punkt $(0;0)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2\cos x - (2x\cos x + x^2(-\sin x)) \\ &= x^2(3 - \sin x) + \cos x \cdot (2 - 2x) \end{aligned}$$

Tangentengleichung:

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(0) + f'(0) \cdot x$$

mit den Werten

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 + 2 \cdot 0 - 0 = 0 \\ f'(0) &= 0^2(3 - 0) + 1(2 - 0) = 2 \end{aligned}$$

folgt für die Tangente

$$t(x) = 2x.$$

Dieses Ergebnis ist natürlich das Mac Laurin - Polynom bis $n = 1$.

Aufgabe 3

(12 Punkte)
Ableitung von Funktionen.

a) differenzierbar, da stetig in ganz $\mathbb{R}$.

$$\left(e^{3x} \cdot 2x\right)' = 3e^{3x} \cdot 2x + e^{3x} \cdot 2 = e^{3x}(6x + 2)$$

b) differenzierbar, da stetig in ganz $\mathbb{R}$.

$$\left(e^{x^3} \cdot 2x^2\right)' = e^{x^3} \cdot 3x^2 \cdot 2x^2 + e^{x^3} \cdot 2 \cdot 2x = e^{x^3}(6x^4 + 4x)$$

c) differenzierbar, da stetig in ganz $\mathbb{R}$.

$$\left(\sqrt{x^2 + 3}\right)' = \frac{1}{2}(x^2 + 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

d) differenzierbar für $x > 0$, da definiert und stetig in $\mathbb{R}^+$.

$$(x \cdot \ln(x))' = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

e) differenzierbar, da stetig in ganz $\mathbb{R}$.

$$\left(e^{\cos(2x)}\right)' = e^{\cos(2x)} \cdot (-\sin(2x)) \cdot 2 = -2\sin(x) \cdot e^{\cos(2x)}$$

Aufgabe 4

(14 Punkte)
Untersuchung der Funktion $f(x) = x^3 - 3x - 2$ im Intervall $]-\frac{3}{2}, 3[$:
Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3 \\ f''(x) &= 6x \\ f^{(3)}(x) &= 6 \end{aligned}$$

Nullstellen: $f(x) = x^3 - 3x - 2 \Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 2$. Durch Ausprobieren findet man ganz einfach $x_1 = 2$ als Nullstelle. Polynomdivision liefert die zweite Nullstelle $x_2 = -1$.

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^3 \qquad\quad - 3x - 2\big) : \big(x - 2\big) = x^2 + 2x + 1 \\ \underline{-\,x^3 + 2x^2} \\ \qquad\quad 2x^2 - 3x \\ \qquad \underline{-\,2x^2 + 4x} \\ \qquad\qquad\qquad x - 2 \\ \qquad\qquad\quad \underline{-\,x + 2} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = -1 \pm \sqrt{1 - 1} = -1$$

Extrema: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1$. Einsetzen in die Funktion $f(\pm 1) = (\pm 1)^3 \pm 3 - 2$ liefert die Extrema $(1, -4)$ und $(-1, 0)$.
Einsetzen in die zweite Ableitung:
$f''(\pm 1) = \pm 6 \Leftrightarrow$ Maximum bei $(-1, 0)$, Minimum bei $(1, -4)$.

Wendepunkte:
$f''(x) = 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
$f^{(3)}(x) = 6 > 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $(0, -2)$.

Für $x \to \pm\infty$ verhält sich die Funktion wie x^3:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Skizze der Funktion im angegebenen Intervall:

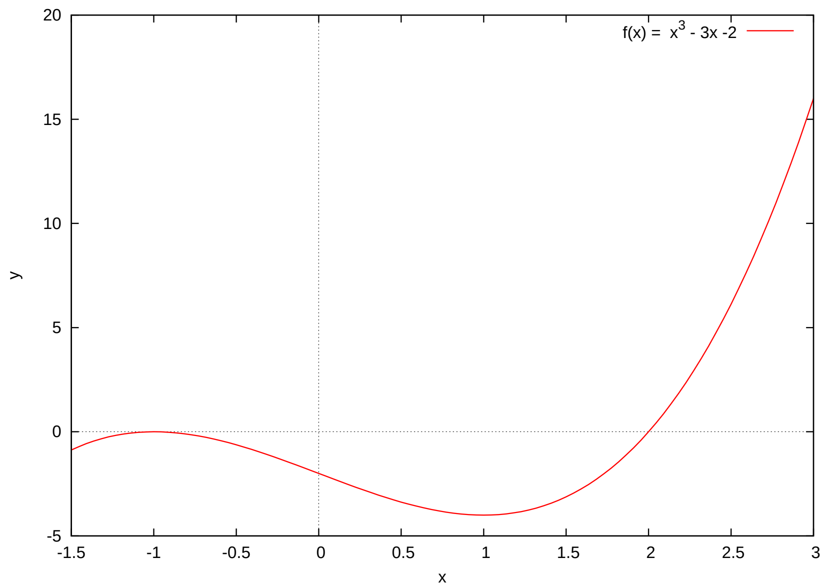

Abbildung 1: die Funktion $f(x) = x^3 - 3x - 2$ im Intervall D.

Aufgabe 5

(11 Punkte)
Taylorpolynom $T_3(x)$ zu $f(x) = e^x \sin x$ um die Stelle $x_0 = 0$: benötigt werden die ersten drei Ableitungen

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x \sin x && \Rightarrow f(0) = 1 \cdot 0 = 0 \\
f'(x) &= e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x) && \Rightarrow f'(0) = 1(0+1) = 1 \\
f''(x) &= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x && \Rightarrow f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \\
f^{(3)}(x) &= 2(e^x \cos x - e^x \sin x) = 2e^x(\cos x - \sin x) && \Rightarrow f^{(3)}(0) = 2(1-0) = 2.
\end{aligned}$$

Damit kann das Taylorpolynom nach der Vorschrift

$$\begin{aligned}
T_3(x) &= \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)(x_0)}}{n!}(x - x_0)^n = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 \\
&= 0 + x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 = x + x^2 + \frac{x^3}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

(5 Punkte)
vollständige Induktion: $f(x) = e^x \cdot x$.

$$\text{Beh. } f^{(n)} = f(x) + e^x \cdot n = e^x(x+n)$$

Induktionsanfang mit $n = 1$:

$$f'(x) = e^x \cdot x + e^x = e^x(x+1)$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' \underbrace{=}_{\text{n. Vor.}} (e^x(x+n))' \\ = e^x(x+n) + e^x \cdot 1 \\ = e^x(x+(n+1)) \end{aligned}$$