Aufgabe 1

Wenn x, y die Koordinaten des Punktes darstellen, ist die Fläche des Rechtecks

$$A = 2xy$$

oder mit der Kreisgleichung $r^2 = x^2 + y^2$

$$A(x) = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

Um das Maximum zu finden, kann die erste Ableitung der Funktion $A(x)$

$$\begin{aligned} A'(x) =& 2\sqrt{r^2 - x^2} + 2x\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-2x) \\ =& 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\ =& \frac{2(r^2 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2r^2 - 4x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \end{aligned}$$

gleich Null gesetzt werden, also

$$2r^2 - 4x^2 \Rightarrow x = \pm\frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} A''(x) =& \frac{-8x\sqrt{r^2 - x^2} - (2r^2 - 4x^2)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^3}{\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2} \\ =& \frac{-8x + (r^2 - 2x^2)(r^2 - x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r^4 + 2x^4 - 3r^2x^2 - 8x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\ A''(\frac{r}{\sqrt{2}}) =& \frac{r^4 + \frac{2r^4}{4} - 3r^2\frac{r^2}{2} - 8\frac{r}{\sqrt{2}}}{\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}}} \\ =& \frac{-8\frac{r}{\sqrt{2}}}{\frac{r}{\sqrt{2}}} = -8 < 0 \end{aligned}$$

Mit dem gefundenen Wert für x kann natürlich auch der y-Wert des Punkts bestimmt werden:

$$y^2 = r^2 - x^2 = r^2 - \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{2} \Rightarrow y = \frac{r}{\sqrt{2}} \text{ positiv, da } y >= 0$$

Die Fläche des Rechtecks beträgt dann

$$A = 2xy = 2\frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} = r^2$$

Aufgabe 2

Ableitung von

a)

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} :$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

b)

$$f(x) = \frac{x^2+x}{2x-x^2} = \frac{x(x+1)}{x(2-x)} = \frac{x+1}{2-x} :$$
$$f'(x) = \frac{1 \cdot (2-x) - (x+1)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{2-x+x+1}{(2-x)^2} = \frac{3}{(2-x)^2}$$

c)

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(\sqrt{4x}) :$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}\cos(\sqrt{4x}) \cdot \frac{1}{2}(4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 = \frac{\cos\sqrt{4x}}{\sqrt{4x}}$$

Aufgabe 3

a) Nullsetzen der ersten Ableitung liefert

$$f'(x) = -\frac{1}{2}3x^2 + 2ax = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{4}x,$$

einsetzen der Stelle $x = 2$:

$$a = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}.$$

Setzt man die Werte für x und a in die zweite Ableitung ein, so ergibt sich

$$f''(x) = -\frac{3}{2} \cdot 2x + 2a = -3x + 2a = -6 + 2\frac{3}{2} = -3 < 0,$$

es handelt sich also um ein Maximum.

b) Die Steigung ergibt sich aus der ersten Ableitung

$$\begin{aligned}
f'(x) = -\frac{1}{2}3x^2 + 2ax &= \frac{4}{3} \\
\Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{4}{3} &= 0 \\
\Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}3x + \frac{2}{3}\frac{4}{3} &= 0 \\
x_{1/2} = \frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{2}{2} - \frac{8}{9}} &= 1 \pm \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Die Tangentengleichungen in den Stellen $x_{1/2}$ an die Kurve ergeben sich nach

$$\begin{aligned}
t_{1/2}(x) &= f(x_{1/2}) + f'(x_{1/2}) \cdot (x - x_{1/2}) : \\
t_1(x) &= f(\frac{4}{3}) + \frac{4}{3}(x - \frac{4}{3}) = 8,52 + \frac{4}{3}(x - \frac{4}{3}) \\
t_2(x) &= f(\frac{2}{3}) + \frac{4}{3}(x - \frac{2}{3}) = 2,81 + \frac{4}{3}(x - \frac{2}{3})
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Nullstellen:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3 = 0$$

Erste Lösung (geraten) ist $x_1 = 1$. Durch Partialbruchzerlegung ergeben sich die beiden weiteren Lösungen:

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 4x^2 \qquad\quad + 3\big) : \big(x - 1\big) = x^2 - 3x - 3 \\
\underline{-\,x^3 \;\; + x^2} \\
\qquad -\,3x^2 \\
\qquad \underline{\;\;3x^2 - 3x} \\
\qquad\qquad -\,3x + 3 \\
\qquad\qquad \underline{\;\;\;3x - 3} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&x^2 - 3x - 3 = 0 \Rightarrow \\
&\qquad x_{2/3} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}.
\end{aligned}$$

Extrema: benötigt werden die 1. und 2. Ableitung:

$$f'(x) = 3x^2 - 8x = x(3x - 8) = 0$$
$$x_1 = 0; x_2 = \frac{8}{3}.$$
$$f''(x) = 6x - 8$$
$$f''(0) = -8 < 0 \Rightarrow \text{ Maximum mit } f(0) = 3,$$
$$f''(\frac{8}{3}) = 8 > 0 \Rightarrow \text{ Minimum mit } f(\frac{8}{3}) = \frac{512 - 768 + 81}{27} = -\frac{175}{27}.$$

Wendestellen:

$$f''(x) = 6x - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{4}{3}, f^{(3)}(x) = 6 \neq 0.$$

Asymptoten: das Polynom hat keine Polstellen, Verhalten für $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 4x^2 + 3 = \infty(\text{ höchster Grad des Polynoms überwiegt})$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^3 - 4x^2 + 3 = -\infty(\text{ höchster Grad des Polynoms überwiegt})$$

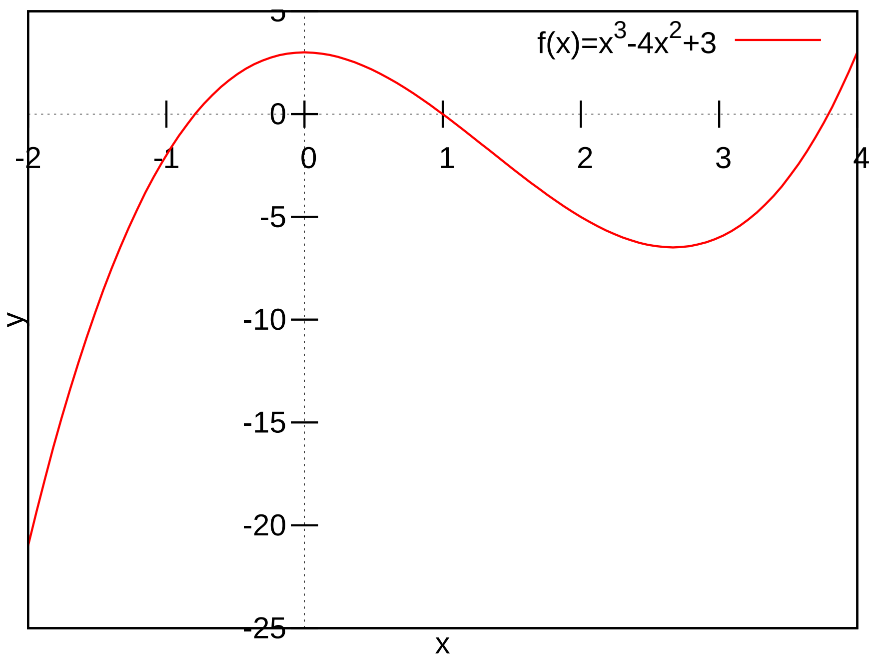

Abbildung 1: die Funktion $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ im Intervall $[-2; 4]$.

Aufgabe 5

Gesucht ist eine allgemeine Formel für die Ableitung von $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \\ f'(x) &= (-1) \cdot \frac{1}{x^2} \\ f''(x) &= (-1)(-2)\frac{1}{x^3} = 2 \cdot \frac{1}{x^3} \\ f^{(3)}(x) &= 2 \cdot (-3)\frac{1}{x^4} = (-1) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1\frac{1}{x^4} \end{aligned}$$

Man erkennt die Systematik:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$$

Beweis über vollständige Induktion:

i) Induktionsanfang mit n=0:

$$f^{(0)}(x) = \frac{(-1)^0 \cdot 0!}{x^{0+1}} = \frac{1}{x}$$

ii) Induktionsschritt:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'$$

nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}\right)' = (-1)^n \cdot n!\frac{(-1) \cdot (n+1)}{x^{n+2}} \\ &= (-1)^n \cdot (-1)(n+1) \cdot n!\frac{1}{x^{(n+1)+1}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)!}{x^{(n+1)+1}} \end{aligned}$$

Damit ist die Entwicklung in die Taylorreihe eigentlich bereits erledigt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{(-1)^n \cdot n!}{x_0^{n+1}}(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1^{n+1}}(x-1)^n \quad = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n \end{aligned}$$