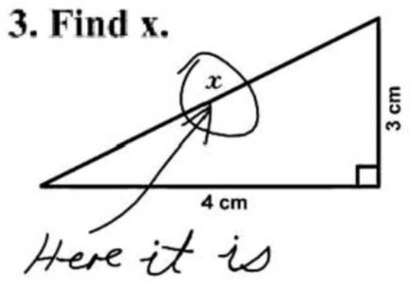
Übungsklausur Mathematik I

TMM11

Zeit: 90Min.
Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.



Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \cdot e^{-|x|}$ mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$.

(a) Schreiben Sie die Funktion in betragsfreier Form und untersuchen Sie $f(x)$ auf Symmetrie. Handelt es sich um eine gerade oder ungerade Funktion? (3 Punkte)

(b) Untersuchen Sie $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ auf Stetigkeit. (3 Punkte)

(c) Besitzt die Funktion einen Grenzwert für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$? Wenn ja, welchen? (2 Punkte)

(d) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich $D = [-5; 5]$. (3 Punkte)

Aufgabe 2

(6 + 4 Punkte)

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung des Sinus den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0+} (\sin(x))^x$$

(Hinweis: $\lim_{x\to 0+} x^x = 1$).

b) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n}{2n+1}$ gegen den Grenzwert $g = \frac{1}{2}$ konvergiert.

Aufgabe 3

(6 Punkte) Arno Nym verhandelt mit seiner Oma Mira Nym (geborene Bellenbaum) über sein Taschengeld. Oma Mira bietet eine Einmalzahlung von 20,- und die Zahlung von 10,- bei jedem weiteren Besuch. Arno hätte gern sofort 0,50, beim nächsten Besuch 1,- gefolgt von 1,50 beim übernächsten Besuch, also bei jedem Besuch eine Steigerung um -,50.

Wieviele Besuche der Oma müssen vergehen, bis Arno gegenüber der Version seiner Oma gewinnt?

Aufgabe 4

(5 Punkte) Berechnen Sie mit Hilfe der Euler-Relation

$$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$

die Potenzreihen des Sinus und des Kosinus.

Aufgabe 5

(9 Punkte) Gegeben sind die Ebene E und die Gerade g:

$$E : 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \qquad g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene.

b) Schneidet die Ebene E die x_2-Achse?

Aufgabe 6

(7 Punkte) Gegeben sind die Matrix A und der Vektor x mit

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden Größen: $A \cdot x, x \cdot A$ und $A^2 (= A \cdot A)$.

Aufgabe 7

(7 Punkte) Das Symbol $0, \bar{9}$ (Periode) kann mit Hilfe einer Reihendarstellung als

$$0, \bar{9} := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 0,999999999...$$

definiert werden. Zeigen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe, dass die Beziehung ($\equiv$: identisch)

$$0, \bar{9} \equiv 1$$

gilt.