Musterlösung zur Klausur Mathematik 3 TMM12

M. Oettinger 19.12.2013

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

Integrale (4+4+3 Punkte):

(a) Partielle Integration:

$$\int x \cdot \cos(3x)dx = x\frac{\sin(3x)}{3} - \int 1 \cdot \frac{\sin(3x)}{3}dx$$
$$= \frac{x\sin(3x)}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{(-1)\cos(3x)}{3} + C = \frac{3x\sin(3x) + \cos(3x)}{9} + C$$

(b)

$$\int x^2 \ln(2x)dx$$

Partielle Integration mit $u' = x^2 \Rightarrow u = x^3/3$ und $v = \ln(2x) \Rightarrow v' = 1/x$:

$$\int x^2 \ln(2x)dx = \frac{x^3}{3}\ln(2x) - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}dx$$
$$= \frac{x^3}{3}\ln(2x) - \int \frac{x^2}{3}dx = \frac{x^3}{3}\ln(2x) - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + C$$
$$= \frac{x^3}{3}\left(\ln(2x) - \frac{1}{3}\right) + C$$

(c) Nutzt man aus, dass $\cos(-x) = \cos(x)$:

$$\int_0^\pi (\cos(-x))^2 + (\sin(x))^2\, dx = \int_0^\pi (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2\, dx$$

und $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, so folgt

$$\int_0^\pi (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2\, dx = \int_0^\pi 1dx = [x]_0^\pi = \pi$$

Aufgabe 2

(6 Punkte)
Doppelintegral des halben Kreisringes (in Polarkoordinaten, weil es sich um einen Bereich mit Rotationssymmetrie handelt) (6 Punkte):

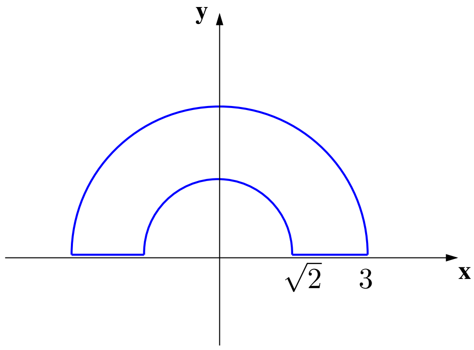

Abbildung 1: Skizze des Bereichs (A)

$$A = \iint\limits_{(A)} dA; \quad y \geq 0;\ 2 \leq x^2 + y^2 < 9.$$

$$\iint\limits_{(A)} dA = \int\limits_{r=\sqrt{2}}^{3} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} r dr d\varphi = \int\limits_{r=\sqrt{2}}^{3} \pi r dr = \pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_{\sqrt{2}}^{3} = \pi \frac{9-2}{2} = \frac{7\pi}{2}$$

Aufgabe 3

(8 Punkte)
Es handelt sich um eine nicht-lineare homogene DGL erster Ordnung. Lösung von $y' + x^2y^3 = 0$ über Separation der Variablen: die konstante Lösung der DGL ist $y = 0$, wenn $y \neq 0$ folgt

$$\frac{y'}{y^3} = -x^2$$

$$\int \frac{y'}{y^3} dy = -\int x^2 dx$$

$$-\frac{1}{2y^2} = -\frac{x^3}{3} + C$$

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{3}{-x^3 + 3C} \cdot \frac{-1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{3}{2x^3 + K}}$$

(mit der Konstanten $K = -6C$). Lösung des Anfangswertproblems: da $y(1) = 2 > 0$ spielt die negative Lösung der Wurzel keine Rolle

$$\begin{aligned} 2 = y(1) &= \sqrt{\frac{3}{2+K}} \\ 4 &= \frac{3}{2+K} \quad \Rightarrow \quad K = -\frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = \sqrt{\frac{3}{2x^3 - \frac{5}{4}}} = \sqrt{\frac{12}{8x^3 - 5}}$$

Aufgabe 4

(14 Punkte)
e zugehörige homogene DGL

$$\dot{I} + \frac{R}{L} I = 0$$

wird für beide Verfahren benötigt, sie kann über Trennung der Variablen gelöst werden:

$$\begin{aligned} \dot{I}_0 = -\frac{R}{L} I(t) &\Leftrightarrow \int \frac{dI_0}{I_0} = -\int \frac{R}{L} dt \\ \ln |I_0| &= -\frac{R}{L} t + \ln |C| \\ I_0(t) = C \cdot e^{-\frac{R}{L}t}. \end{aligned}$$

Die Lösung der inhomogenen DGL

a) über die Variation der Konstanten: Ansatz ist

$$\begin{aligned} I(t) &= C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \\ \dot{I}(t) &= \dot{C}(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{R}{L} C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \end{aligned}$$

in die DGL eingesetzt

$$\begin{aligned}
\frac{U_0}{L} &= \dot{C}(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{R}{L}C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{R}{L}C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \\
&= \dot{C}(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \\
&\Rightarrow \quad \dot{C}(t) = \frac{U_0}{L} \cdot e^{\frac{R}{L}t} \\
&\Rightarrow C(t) = \frac{U_0}{L} \int e^{\frac{R}{L}t} dt = \frac{U_0}{L}\frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} + C \\
I(t) = C(t)I_0(t) = \left(\frac{U_0}{R} e^{\frac{R}{L}t} + C\right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} &= \frac{U_0}{R} + C \cdot e^{-\frac{R}{L}t}
\end{aligned}$$

b) über das Aufsuchen einer partikulären Lösung: der Störterm ist konstant, also wählen wir als Ansatz

$$I_p(t = A \quad \Rightarrow \dot{I}_p(t) = 0$$

in die DGL eingesetzt

$$\begin{aligned}
0 + \frac{R}{L}A = \frac{U_0}{L} \\
I_p(t) = A = \frac{U_0}{R} I(t) = I_0(t) + I_p(t) = \frac{U_0}{R} + C \cdot e^{-\frac{R}{L}t}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Differentialgleichungen (3 Punkte):

$$y'^2 + 2y - 3x + \sin x = 0 \tag{1}$$
$$y'' + yx^3 = 4x \tag{2}$$

Gleichung	(1)	(2)
linear	-	X
nicht-linear	X	-
homogen	-	-
inhomogen	X	X
Ordnung	1	2

Aufgabe 6

(8 Punkte)
$f(x) = \pi \cdot \sin(x)$ soll in eine Fourierreihe entwickelt werden:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \pi \cdot \sin(x)dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)dx = 0$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \pi \cdot \sin(x)\cos(nx)dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)\cos(nx)dx = 0$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \pi \cdot \sin(x)\sin(nx)dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)\sin(nx)dx = \begin{cases} \pi & \text{für} \quad n = 1 \\ 0 & \text{für} \quad n \neq 1 \end{cases}$$

Als einziger Term bleibt also $b_1 = \pi$, in die Fourier-Reihe eingesetzt folgt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = b_1 \sin(1 \cdot x) = \pi \cdot \sin(x).$$

Einfacher findet man die Lösung, wenn man ausnutzt, dass der Sinus ungerade ist, es müssen also alle geraden Terme verschwinden ($a_0 = 0, a_n = 0$). Schreibt man die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) + \ldots$$

aus, erkennt man über einen einfachen Koeffizientenvergleich sofort, dass $b_1 = \pi$.

Aufgabe 7

(5 Punkte)

a) $f(x) = \cos(x+1)$ ist ein um den Betrag 1 nach links verschobener Kosinus und damit 2π-periodisch.

b) $f(x) = x \cdot \cos(5x)$ ist nicht periodisch, da für kein $x \in \mathbb{R}$ die Beziehung $x \cdot \cos(x) = (x + L) \cdot \cos(x + L)$ gilt.

c) $\sin^2(x) + \cos^2(x) - 2x = 1 - 2x$ (mit dem Adiitionstheorem $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$). Die Funktion $f(x) = 1 - 2x$ ist nicht periodisch, da $f(x + T) \neq f(x)$ für alle $T > 0$.