Musterlösung zur Klausur Mathematik 2 TMM11

M. Oettinger 28.6.2012

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(6 Punkte)
Der Querschnitt des Rohres ist

$$A = a \cdot b \ \Rightarrow \ b = \frac{A}{a},$$

der Materialverbrauch ist proportional zum Umfang

$$U = 2(a + b) == 2\left(a + \frac{A}{a}\right) = U(a)$$

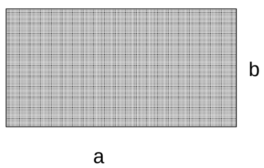

Abbildung 1: Rechteck mit Fläche $a \cdot b$ und Umfang $2(a + b)$

Der Umfang kann als Funktion der Seitenlänge a gesehen werden, den minimalen Wert des Umfang findet man durch Ableiten:

$$
\begin{aligned}
U'(a) &= 2\left(1 - \frac{A}{a^2}\right) = 0 \\
2a^2 &= 2A \;\Rightarrow\; a = \pm\sqrt{A} \\
b &= \frac{A}{a} = \pm\sqrt{A} \\
U''(a) &= 2\left(0 - (-2)\frac{A}{a^3}\right) \\
U''(\sqrt{A}) &= 4\frac{A}{\sqrt{A}^3} = \frac{4}{\sqrt{A}} > 0
\end{aligned}
$$

Es handelt sich also um ein Minimum. Die negative Lösung beschreibt die zweite Möglichkeit der Messung von Längen, die Gegenrichtung.

Aufgabe 2

(7 Punkte)
Gleichung der Tangente $t(x)$ an die Kurve $f(x) = \frac{1}{2}\left(x^3 + \sin x - x^2 \cos x\right)$ im Punkt $(0;0)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 + \cos x - (2x\cos x + x^2(-\sin x))\right)$$

Tangentengleichung:

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(0) + f'(0) \cdot x$$

mit den Werten

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \frac{1}{2}(0 + 0 - 0) = 0 \\
f'(0) &= \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

folgt für die Tangente

$$t(x) = \frac{1}{2}x.$$

Dieses Ergebnis ist natürlich das Mac Laurin - Polynom bis $n = 1$.

Aufgabe 3

(12 Punkte)
Ableitung von Funktionen.

a) differenzierbar, da stetig in ganz $\mathbb{R}$.

$$\left(e^{3x} \cdot 2x\right)' = 3e^{3x} \cdot 2x + e^{3x} \cdot 2 = e^{3x}(6x+2)$$

b) differenzierbar, da stetig in ganz $\mathbb{R}$.

$$\left(e^{x^3} \cdot 2x^2\right)' = e^{x^3} \cdot 3x^2 \cdot 2x^2 + e^{x^3} \cdot 2 \cdot 2x = e^{x^3}(6x^4 + 4x)$$

c) differenzierbar, da stetig in ganz $\mathbb{R}$.

$$\left(\sqrt{x^2+3}\right)' = \frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

d) differenzierbar für $x > 0$, da definiert und stetig in $\mathbb{R}^+$.

$$(x \cdot \ln(x))' = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

e) differenzierbar, da stetig in ganz $\mathbb{R}$.

$$\left(e^{\cos(2x)}\right)' = e^{\cos(2x)} \cdot (-\sin(2x)) \cdot 2 = -2\sin(x) \cdot e^{\cos(2x)}$$

Aufgabe 4

(14 Punkte)
Die benötigten Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - x^3 \\ f'(x) &= 6x - 3x^2 \\ f''(x) &= 6 - 6x \\ f^{(3)}(x) &= -6 \end{aligned}$$

Bestimmung der Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) = 3x^2 - x^3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2(3-x) = 0 \\ x_1 = 0; x_2 = 3 \end{aligned}$$

Extrema:

$$f'(x) = 6x - 3x^2 \;\Leftrightarrow\; x(2-x) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$$
$$f(0) = 0;\; f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow \text{ Minimum bei } (0/0)$$
$$f(2) = 12 - 8 = 4;\; f''(2) = -6 < 0 \Rightarrow \text{ Maximum bei } (2/4)$$

Wendestellen und Krümmung:

$$f''(x) = 6 - 6x = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - x = 0$$
$$x = 1$$
$$f^{(3)}(x) = -6 \neq 0;\; f(1) = 2 \Rightarrow \text{ Wendepunkt bei } (1/2)$$
$$f''(x) < 0 \text{ für } x > 1 \Rightarrow \text{ rechtsgekrümmt}$$
$$f''(x) > 0 \text{ für } x < 1 \Rightarrow \text{ linksgekrümmt}$$

Verhalten für große/kleine Variablenwerte:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 3x^2 - x^3 \to \lim_{x\to\infty} -x^3 = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3x^2 - x^3 \to \lim_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$$

Skizze der Funktion im angegebenen Intervall:

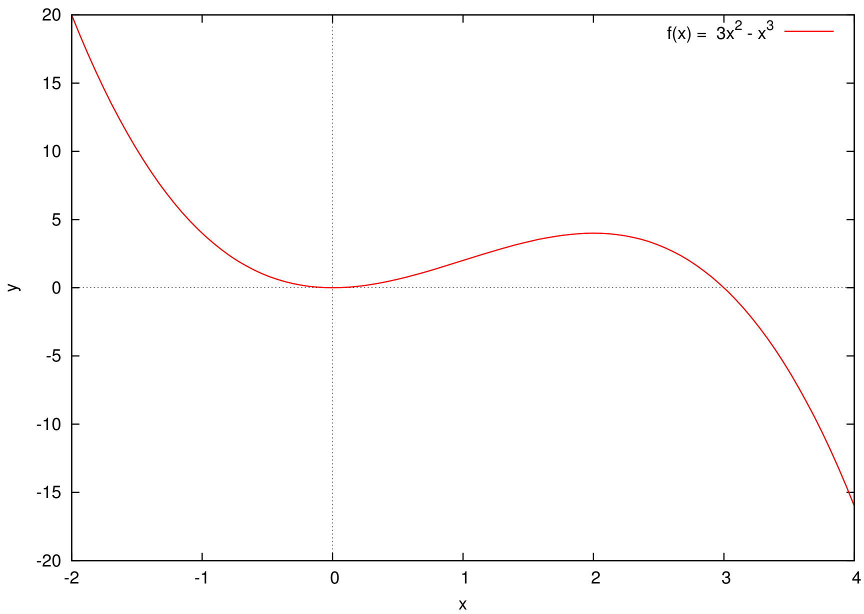

Abbildung 2: die Funktion $f(x) = 3x^2 - x^3$ im Intervall D.

Aufgabe 5

(11 Punkte)

$$\sqrt{2,1} = (2,1)^{1/2}\,,$$

es liegt nahe, die Funktion

$$f(x) = \sqrt{2+x} = (2+x)^{1/2}$$

um die Stelle $x_0 = 0$ zu entwickeln:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{2+x} \;\Rightarrow\; f(0) = \sqrt{2} \\
f'(x) &= \frac{1}{2}\,(2+x)^{-1/2} \;\Rightarrow\; f'(0) = \frac{1}{2}\,(2)^{-1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Also ist das Taylorpolynom

$$T_1(x) = f(0) + f'(0)\cdot x = \sqrt{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x$$

und die Funktion

$$\begin{aligned}
f(x) &\approx T_1(x) \\
\frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2}} &\approx \frac{1}{\sqrt{2}}T_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x\right) \\
&\Rightarrow \frac{\sqrt{2,1}}{\sqrt{2}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}T_1(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0,1\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\cdot 0,1 = 1 + \frac{1}{40} = 1,025.
\end{aligned}$$

Der dritte Term der Entwicklung ist

$$\begin{aligned}
\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 &= \frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(2)^{-\frac{3}{2}}x^2 \\
&= -\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2}\;\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}\;x^2.
\end{aligned}$$

Man sieht sofort den Faktor $1/8$ im Vergleich zum zweiten Term, für unser $x = 0,1$ ergibt sich durch das Quadrat zusätzlich der Faktor $0,1$, der dritte Term besitzt also $0,1\cdot 1/8$ der Größe des zweiten.

Aufgabe 6

(5 Punkte)
vollständige Induktion: $f(x) = e^x \cdot x$.

$$\text{Beh. } f^{(n)} = f(x) + e^x \cdot n = e^x(x+n)$$

Induktionsanfang mit $n = 1$:

$$f'(x) = e^x \cdot x + e^x = e^x(x+1)$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' \underbrace{=}_{\text{n. Vor.}} (e^x(x+n))' \\ = e^x(x+n) + e^x \cdot 1 \\ = e^x(x+(n+1)) \end{aligned}$$