Musterlösung zur Übungsklausur Mathematik 1 TMM12

M. Oettinger 3.2012

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(14 Punkte):

$$r_1(x) = e^{|x|}, \quad r_2(x) = e^{|-x|}$$

a) Es handelt sich um Funktionen, jedem Wert $x \in \mathbb{R}$ ist eindeutig ein Funktionswert $y = e^{|x|}$ zugeordnet. Dabei gilt natürlich $r_1(x) = r_2(x)$.

b) Betragsfreie Form:

$$r_1(x) = r_2(x) = \begin{cases} e^x & \text{für } x \geq 0 \\ e^{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Es gilt

$$r_1(-x) = e^{-(-x)} = e^x = r_1(x),$$

also handelt es sich um eine gerade Funktion (spiegelsymmetrisch zur y-Achse).

c) Stetigkeit:

$$\lim_{x \to 0-} r_1(x) = \lim_{x \to 0-} e^{-x} = \lim_{x \to 0+} e^x = \lim_{x \to 0+} r_1(x)$$

Die Funktion $r_1(x)$ ist also stetig in $x_0 = 0$.

d) Verhalten für große/kleine Werte:

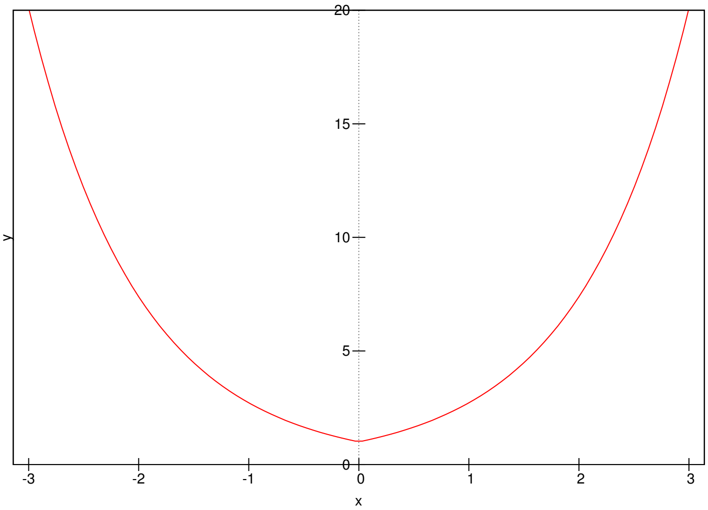
$$lim_{x \to \infty} e^x = lim_{x \to -\infty} e^{-x} = \infty,$$

denn für $Q > 1$ und alle a gilt:

$$lim_{x \to \infty} \frac{Q^x}{x} = \infty$$

'Q^x wächst schneller als jede Potenz von x'.

e)



Aufgabe 2

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x(1-\cos(x))} &= \lim_{x\to 0}\frac{-x+x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots}{x-x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots}{-x\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots}{-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{4!}-\dots} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3}\cdot\frac{-\frac{1}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\dots}{-\frac{1}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\dots}\\
&= \frac{-\frac{1}{3!}}{-\frac{1}{2!}} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

Oma Nym bietet nach n Besuchen die Summe von

$$S_1 = 10+\sum_{i=1}^{n} 10 = 10 + n\cdot 10 = 10(n+1),$$

für Arnos Version ergibt sich (mit der Gauß-Summe)

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n} 0,5\cdot i = \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$

Arno gewinnt, wenn seine Summe größer ist, also

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} &> 10(n+1) \\ \frac{n}{4} &> 10 \\ n &> 40 \end{aligned}$$

Ab dem 41. Besuch ist Arnos Summe größer.

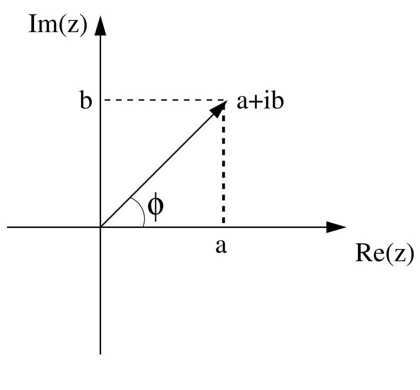
Aufgabe 4

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \frac{1}{0!} \cdot 1 + \frac{1}{1!}(ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + ... \\ &= \frac{1}{0!} \cdot 1 + i\frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + -i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + ... \\ &= \frac{1}{0!} \cdot 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + ... \\ &+ i\left(\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + ...\right) \end{aligned}$$

Mit der Euler-Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} \end{aligned}$$

Aufgabe 5



a)

b) Kartesische Darstellung: mit $a = r\cos(\varphi), b = r\sin(\varphi)$ und $z = a + ib$ folgt unter Ausnutzen von $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$z = a + ib = 2\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot 2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 + i \cdot 2$$

c) der Betrag $|z|$ ist natürlich $r = 2\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + b^2}$, die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z} = 2 - i \cdot 2$

Aufgabe 6

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$x \cdot A$ lässt sich nicht berechnen,

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

i) Der Induktionsanfang mit $n_0 = 1$ gilt wegen

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2 - 1 = 1^2.$$

ii) Beim Induktionsschritt ist zu zeigen: Wenn

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \text{ , dann gilt } \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$$

Wir führen den Induktionsschritt aus:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) \\ &\overset{\text{n. Vorr.}}{=} n^2 + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 2 - 1 \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

Die Induktionsvorraussetzung wurde dabei in der zweiten Umformung benutzt, um die Summe zu ersetzen.