

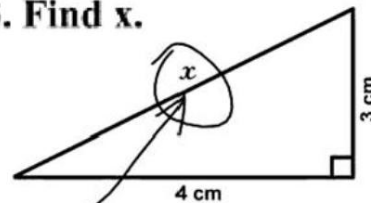
Übungsklausur Mathematik I

TMM12

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

3. Find x.



Here it is

Aufgabe 1

Gegeben sind die Relationen

$$r_1(x) = e^{|x|}, \quad r_2(x) = e^{-|x|}$$

mit Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$.

- Handelt es sich um Funktionen (wenn ja, warum)?
- Schreiben Sie $r_1(x)$ und $r_2(x)$ in betragsfreier Form und untersuchen Sie auf Symmetrie. Handelt es sich um gerade oder ungerade Funktionen oder Relationen?
- Untersuchen Sie die beiden Relationen an der Stelle $x_0 = 0$ auf Stetigkeit
- Untersuchen Sie das Verhalten der Relationen für große und kleine Variablenwerte.
- Skizzieren Sie $r_1(x)$ und $r_2(x)$ im Intervall $I = [-\pi; \pi]$.

Aufgabe 2

(10 Punkte) Bestimmen Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklungen den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x(1 - \cos(x))}$$

Aufgabe 3

(6 Punkte) Arno Nym verhandelt mit seiner Oma Mira Nym (geborene Bellenbaum) über sein Taschengeld. Oma Mira bietet eine Einmalzahlung von 20,- und die Zahlung von 10,- bei jedem weiteren Besuch. Arno hätte gern sofort 0,50, beim nächsten Besuch 1,- gefolgt von 1,50 beim übernächsten Besuch, also bei jedem Besuch eine Steigerung um -,50.

Wieviele Besuche der Oma müssen vergehen, bis Arno gegenüber der Version seiner Oma gewinnt?

Aufgabe 4

(5 Punkte) Berechnen Sie mit Hilfe der Euler-Relation

$$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$

die Potenzreihen des Sinus und des Kosinus.

Aufgabe 5

(9 Punkte) Eine komplexe Zahl z wird in der Gaußschen Zahlenebene durch den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und die Länge $r = 2\sqrt{2}$ dargestellt ($\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$).

- Skizzieren Sie die Zahl in der Gauß-Ebene
- Stellen Sie die Zahl in der kartesischen Form als $z = a + i \cdot b$ dar
- Wie lautet der Betrag $|z|$ und die konjugiert komplexe Zahl \bar{z} zu z ?

Aufgabe 6

(7 Punkte) Gegeben sind die Matrix A und der Vektor x mit

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden Größen: $A \cdot x$, $x \cdot A$ und $A^2 (= A \cdot A)$.

Aufgabe 7

(7 Punkte) Die schrittweise Berechnung der Summe der ersten n ungeraden Zahlen

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1 + 3 &= 4 \\ 1 + 3 + 5 &= 9 \\ 1 + 3 + 5 + 7 &= 16 \end{aligned}$$

legt die Vermutung nahe, dass die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis $2n - 1$ gleich dem Quadrat von n ist, also

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2.$$

Beweisen Sie die Behauptung.