

Musterlösung zur Übungsklausur Mathematik 1 TMM13

M. Oettinger 3.2014

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 53, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(14 Punkte):

$$r_1(x) = e^{|x|}, \quad r_2(x) = e^{|-x|}$$

a) Es handelt sich um Funktionen, jedem Wert $x \in \mathbb{R}$ ist eindeutig ein Funktionswert $y = e^{|x|}$ zugeordnet. Dabei gilt natürlich $r_1(x) = r_2(x)$.

b) Betragsfreie Form:

$$r_1(x) = r_2(x) = \begin{cases} e^x & \text{für } x \geq 0 \\ e^{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Es gilt

$$r_1(-x) = e^{-(-x)} = e^x = r_1(x),$$

also handelt es sich um eine gerade Funktion (spiegelsymmetrisch zur y -Achse).

c) Stetigkeit:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} r_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} r_1(x)$$

Die Funktion $r_1(x)$ ist also stetig in $x_0 = 0$.

d) Verhalten für große/kleine Werte:

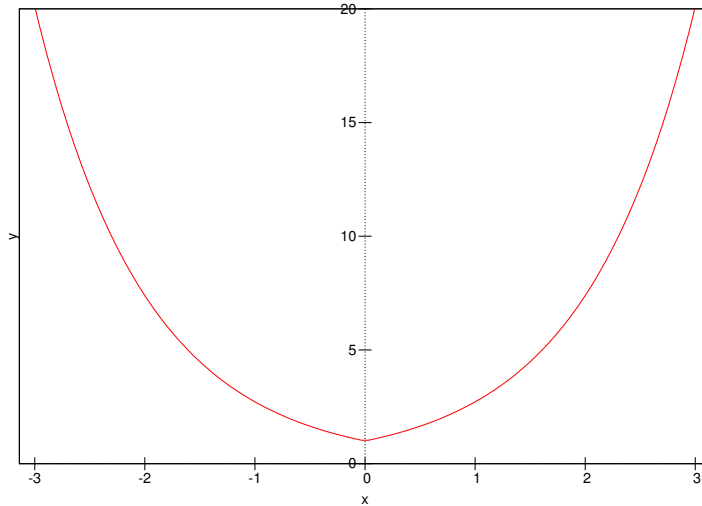
$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty,$$

denn für $Q > 1$ und alle a gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Q^x}{x} = \infty$$

' Q^x wächst schneller als jede Potenz von x '.

e)



Aufgabe 2

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x(1 - \cos(x))} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{x - x \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{-x \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{-\frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \dots} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^3} \cdot \frac{-\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \dots}{-\frac{1}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \dots} \\
 &= \frac{-\frac{1}{3!}}{-\frac{1}{2!}} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Oma Nym bietet nach n Besuchen die Summe von

$$S_1 = 20 + \sum_{i=1}^n 10 = 20 + n \cdot 10,$$

für Arnos Version ergibt sich (mit der Gauß-Summe)

$$S_2 = \sum_{i=1}^n 0,5 \cdot i = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

Arno gewinnt, wenn seine Summe größer ist, also

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} &> 20 + n \cdot 10 \\ n^2 + n &> 80 + 40n \\ n^2 - 39n - 80 &> 0\end{aligned}$$

Die Lösungen der quadrat. Gleichung lauten $n_1 = -1,95$ und $n_2 = 40,95$, Arno gewinnt also nach insgesamt 41 Besuchen (die negative Lösung kann verworfen werden, weil die Summen nur positive Indizes liefern).

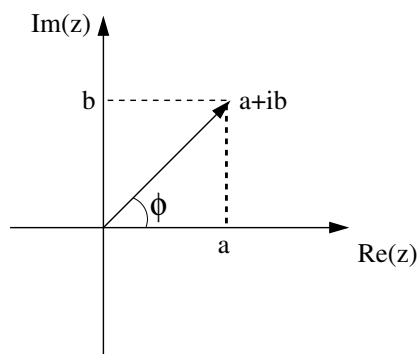
Aufgabe 4

$$\begin{aligned}e^{ix} &= \frac{1}{0!} \cdot 1 + \frac{1}{1!}(ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \dots \\ &= \frac{1}{0!} \cdot 1 + i\frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 - i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \\ &= \frac{1}{0!} \cdot 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots \\ &\quad + i \left(\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots \right)\end{aligned}$$

Mit der Euler-Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k}\end{aligned}$$

Aufgabe 5



b) Kartesische Darstellung: mit $a = r \cos(\varphi)$, $b = r \sin(\varphi)$ und $z = a + ib$ folgt unter Ausnutzen von $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$z = a + ib = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 + i \cdot 2$$

c) der Betrag $|z|$ ist natürlich $r = 2\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + b^2}$, die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z} = 2 - i \cdot 2$

Aufgabe 6

(7 Punkte):

i) Induktionsanfang: mit $n_0 = 1$

$$1^1 = \frac{1}{2}1^2 + \frac{1}{2}1$$

ii) Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^n k + (n+1) \\ &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + n + 1 = \frac{n^2 + n + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1 + n + 1}{2} = \frac{(n+1)^2 + n + 1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1) \end{aligned}$$

Aufgabe 7

(5 Punkte):

$$f(x) = \begin{cases} 8a + 16x & x < 2 \\ a^2(x+2) & x \geq 2 \end{cases}$$

Die Funktion ist stetig in $x = 2$, wenn

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} a^2(x+2) = 4a^2 = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 8a + 16x = 8a + 32$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 = 8a + 32 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 8 = 0$$

Die beiden Lösungen sind $x_1 = 4$ und $x_2 = -2$