Aufgabe 1

(8 Punkte):

(a) Betragsfreie Form:

$$r(x) = \sin(|x-3|) = \begin{cases} \sin(x-3) & \text{für} x \geq 3 \\ \sin(-(x-3)) = -\sin(x-3) & \text{für} x < 3 \end{cases}$$

Jedem x-Wert aus $D = \mathbb{R}$ ist eindeutig ein Wert y zugeordnet $\Rightarrow$ es handelt sich um eine Funktion.

Symmetrie: Es gilt $r(-x) not = -r(x)$ und $r(-x) \neq r(x)$. Die Funktion ist nicht symmetrisch.

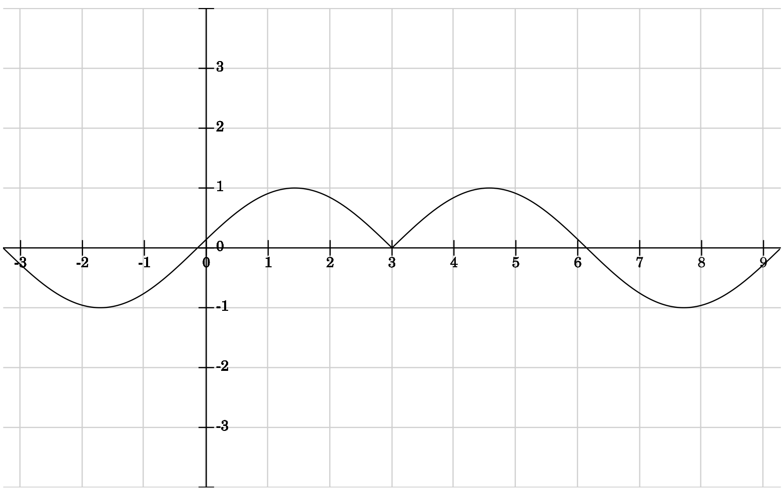
(b) Stetigkeit in $x_0 = 3$:

$$\lim_{x \to 3+} r(x) = \lim_{x \to 3+} \sin(x-3) = f(3) = 0$$

$$\lim_{x \to 3-} r(x) = \lim_{x \to 3-} -\sin(x-3) = f(3) = 0$$

$\Rightarrow$ die Funktion $r(x)$ ist in $x_0 = 3$ stetig und damit stetig (da $\sin(x)$ stetig in $\mathbb{R}$).

(c) Skizze der Funktion:



Aufgabe 2

(8 Punkte)
Lösungen der Gleichungen

a) $x(x^2-7)=-6 \quad\Rightarrow\quad x^3-7x+6=0$, die erste Lösung $x_1=1$ lässt sich einfach erraten. Durch Polynomdivision durch den Faktor $(x-1)$:

$$
\begin{array}{l}
\big(\;\; x^3 \qquad -7x+6\big) : \big(x-1\big) = x^2+x-6 \\
\underline{-x^3+x^2} \\
\qquad x^2-7x \\
\qquad \underline{-x^2\;+x} \\
\qquad\qquad -6x+6 \\
\qquad\qquad \underline{\;\;6x-6} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

die weiteren Lösungen z. B. mit der $p-q-$Form

$$
\begin{aligned}
x_{2/3} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \\
&= -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = \frac{-1\pm 5}{2}. \\
&\Rightarrow x_2=-3 \quad x_3=2
\end{aligned}
$$

b) $x^3+6x^2+9x=0$: nach Ausklammern sieht man die triviale Lösung sofort

$$x^3+6x^2+9x = x(x^2+6x+9) \quad \Rightarrow x_1=0.$$

Mit Hilfe der binomischen Formel $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ folgt

$$
\begin{aligned}
x^2+6x+9 &= x^2+2\cdot 3\cdot x+3^2=(x+3)^2=0 \\
x+3=0 &\quad \Rightarrow x_{2/3}=-3.
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{gathered}
3x^3-24x^2+20x+2=2-25x \\
\Leftrightarrow 3x^3-24x^2+45x=0 \\
\Leftrightarrow 3x(x^2-8x+15)=0 \Rightarrow x_1=0. \\
x^2-8x+15=0,\ \text{Lösung mit } p,q\text{-Formel:} \\
x_{2/3}=4\pm\sqrt{16-15}=4\pm 1 \\
x_2=3, x_3=5
\end{gathered}
$$

Aufgabe 3

(5 Punkte)

(a)

$$\prod_{i=2}^{5}(i-1)+\sum_{k=0}^{3}(2k+1)=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+1+3+5+7=24+16=40$$

(b)

$$4!+\sum_{k=1}^{4}(2k-1)=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+1+3+5+7=24+16=40$$

Aufgabe 4

(6 Punkte):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}(\sin(x))^{2x} &= \lim_{x\to 0+}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...\right)^{2x}\\ &= \lim_{x\to 0+}\underbrace{x^x}_{\xrightarrow{x\to 0+}1}\cdot\underbrace{x^x}_{\xrightarrow{x\to 0+}1}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+...\right)^{2x}}_{\xrightarrow{x\to 0+}1}\\ &\implies \lim_{x\to 0+}(\sin(x))^{2x}=1\cdot 1\cdot 1=1\end{aligned}$$

Aufgabe 5

(a) f und g lassen sich jeweils als Summe von u und v darstellen:

$$f=\frac{1}{2}(u+v),\qquad g=\frac{1}{2}(u-v).$$

Die Summe zweier stetiger Funktionen ist immer stetig.

(b) Wir wählen eine unstetige Funktion, beispielsweise $f=\frac{1}{x}$ und $g(x)=-f(x)$. Dann ist die Summe der beiden Funktionen

$$u=f+g=0$$

stetig, die einzelnen Funktionen aber nicht.

Aufgabe 6

(5 Punkte):

$$\begin{aligned}\sin(i) &= i - \frac{i^3}{3!} + \frac{i^5}{5!} - \frac{i^7}{7!} + ... \\ &= i\left(1 + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^5}{5!} + \frac{1^7}{7!} + ...\right) \quad = i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \cdot 1^{2k+1} = i \cdot \sinh(1)\end{aligned}$$

Aufgabe 7

(7 Punkte): Vollständige Induktion:

i) Der Induktionsanfang mit $n_0 = 1$ gilt wegen

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2 - 1 = 1^2.$$

ii) Beim Induktionsschritt ist zu zeigen: Wenn

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \text{ , dann gilt } \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$$

Wir führen den Induktionsschritt aus:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) \\ &\overset{\text{n. Vorr.}}{=} n^2 + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 2 - 1 \\ &= (n+1)^2.\end{aligned}$$

Aufgabe 8

Stetigkeit: $f(x)$ ist eine ganzrationale Funktion, es gibt keine besonders zu behandelnden Stellen in $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0-} f(x) &= \lim_{h\to 0}(x_0-h)^3+(x_0-h)^2+4 \\
&= \lim_{h\to 0} x_0^3-3x_0^2h+3x_0h^2-h^3+x_0^2-2x_0h+h^2+4 \\
&= \lim_{h\to 0} x_0^3+x_0^2+4 = f(x_0) \ \ \forall x_0\in\mathbb{R} \\
\lim_{x\to x_0+} f(x) &= \lim_{h\to 0}(x_0+h)^3+(x_0+h)^2+4 \\
&= \lim_{h\to 0} x_0^3+3x_0^2h+3x_0h^2+h^3+x_0^2+2x_0h+h^2+4 \\
&= \lim_{h\to 0} x_0^3+x_0^2+4 = f(x_0) \ \ \forall x_0\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Die Funktion ist für alle x_0 im Definitionsbereich stetig $\Rightarrow$ sie ist stetig.

$g(x)$ zeigt eine Unstetigkeit bei $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1-} g(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{1-h-1} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{-h} \quad \text{existiert nicht.} \\
\lim_{x\to 1+} g(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{1-+h-1} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h} \quad \text{existiert nicht.}
\end{aligned}$$

Ein Grenzwert existiert nicht, die Funktion ist in $x_0 = 1$ nicht stetig. Damit ist $g(x)$ nicht stetig.

Natürlich sind $g(x)$ und $f(x)$ Relationen. $f(x)$ ist eine Abbildung (eindeutige Zuordnung) der Werte aus $\mathbb{R}$ und damit eine Funktion, bei $g(x)$ existiert kein Wert $f(x_0)$ an der Stelle $x_0 = 1$ - keine Funktion.