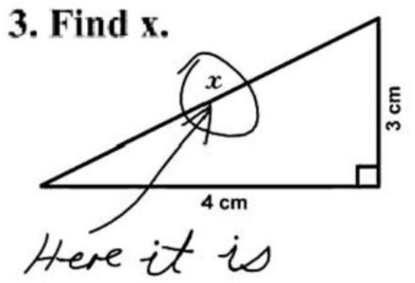
Übungsklausur Mathematik I

TMM14

Zeit: 90Min.
Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.



Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \cdot e^{-|x|}$ mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$.

(a) Schreiben Sie die Funktion in betragsfreier Form und untersuchen Sie $f(x)$ auf Symmetrie. Handelt es sich um eine gerade oder ungerade Funktion? (3 Punkte)

(b) Untersuchen Sie $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ auf Stetigkeit. (3 Punkte)

(c) Besitzt die Funktion einen Grenzwert für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$? Wenn ja, welchen? (2 Punkte)

(d) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich $D = [-5; 5]$. (3 Punkte)

Aufgabe 2

(6 + 4 Punkte)

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung des Sinus den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0+} (\sin(x))^x$$

(Hinweis: $\lim_{x \to 0+} x^x = 1$).

b) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n}{2n+1}$ gegen den Grenzwert $g = \frac{1}{2}$ konvergiert.

Aufgabe 3

(6 Punkte) Arno Nym verhandelt mit seiner Oma Mira Nym (geborene Bellenbaum) über sein Taschengeld. Oma Mira bietet eine Einmalzahlung von 20,- und die Zahlung von 10,- bei jedem weiteren Besuch. Arno hätte gern sofort 0,50, beim nächsten Besuch 1,- gefolgt von 1,50 beim übernächsten Besuch, also bei jedem Besuch eine Steigerung um -,50.

Wieviele Besuche der Oma müssen vergehen, bis Arno gegenüber der Version seiner Oma gewinnt?

Aufgabe 4

(5 Punkte) Berechnen Sie mit Hilfe der Euler-Relation

$$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$

die Potenzreihen des Sinus und des Kosinus.

Aufgabe 5

Alfred B. Trüger versucht seinem Kommilitonen Stu Dent zu beweisen, dass $2 \cdot 2 = 5$ ist:

$$20 = 20 \tag{1}$$
$$-20 = -20 \tag{2}$$
$$0 - 20 = 0 - 20 \tag{3}$$
$$16 - 16 - 20 = 25 - 25 - 20 \tag{4}$$
$$16 - 36 = 25 - 45 \tag{5}$$
$$16 - 36 + \frac{81}{4} = 25 - 45 + \frac{81}{4} \tag{6}$$
$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 \tag{7}$$
$$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2} \tag{8}$$
$$2 \cdot 2 = 5 \tag{9}$$

Stu glaubt das nicht (er hat recht!). Wo liegt der erste Fehler im obigen "Beweis"?

Aufgabe 6

Lösen Sie die Gleichungen

a)

$$x^3 + 3x = 0$$

b)

$$x^3 + \frac{x^2}{2} \sum_{i=1}^{4} i + 2x = \frac{1}{3} \prod_{i=1}^{4} i$$

Aufgabe 7

(7 Punkte) Das Symbol $0,\bar{9}$ (Periode) kann mit Hilfe einer Reihendarstellung als

$$0,\bar{9} := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 0,999999999...$$

definiert werden. Zeigen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe, dass die Beziehung ($\equiv$: identisch)

$$0,\bar{9} \equiv 1$$

gilt.