Musterlösung zur Klausur Mathematik 1 (TMM14)

M. Oettinger 26.03.2015

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(9 Punkte):

(a) Betragsfreie Form:

$$r(x) = \frac{1}{|3x-1|} = \begin{cases} \frac{1}{1-3x} & \text{für} x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3x-1} & \text{für} x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Es handelt sich nicht um eine Funktion - dem Wert $x = \frac{1}{3}$ aus D ist kein Wert y zugeordnet.

Symmetrie: sei $x \leq 2$, dann ist

$$r(-x) = \frac{1}{3(-x)-1} = -\frac{1}{3x+1} \neq -r(x) = -\frac{1}{3x-1}$$

$$r(-x) = \frac{1}{3(-x)-1} = -\frac{1}{3x+1} \neq r(x) = \frac{1}{3x-1}$$

$r(x)$ ist nicht symmetrisch.

(b) Grenzwert der Folge: Vermutung $a = 0$:

$$\left|\frac{1}{3n-1} - 0\right| = \frac{1}{|3n-1|} < \varepsilon$$

$$3n > \frac{1}{\varepsilon} + 1$$

$$n > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)$$

Die Folge besitzt den Grenzwert Null.

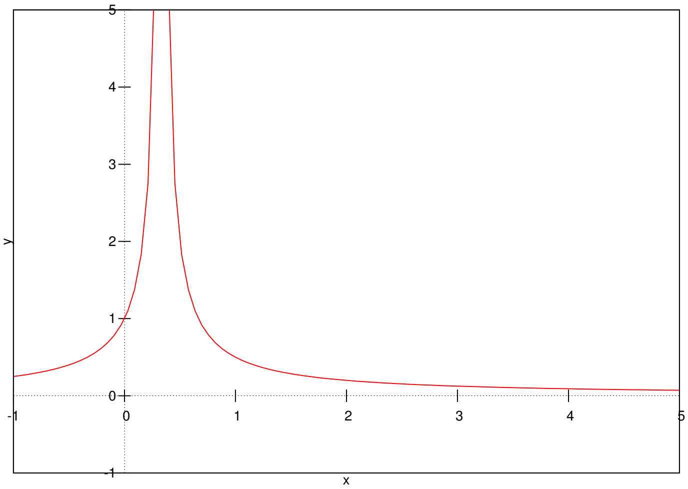
(c) Verhalten für $x \to \pm\infty$: der Grenzwert der zugehörigen Folge ist Null

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{|3x-1|} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3x-1} = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} r(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{|3x-1|} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3x-1} = 0,$$

denn $r(x)$ ist ein Polynom, der Grad des Nenners ist größer als der Grad des Zählers.

(d) Skizze der Funktion:



Aufgabe 2

(9 Punkte)
Lösungen der Gleichungen

a) $x^3 - \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} = 0$, die erste Lösung $x_1 = 1$ lässt sich einfach erraten.

Durch Polynomdivision durch den Faktor $(x-1)$:

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 \quad - x + \frac{1}{2}\right) : \left(x-1\right) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\
\underline{-x^3 \quad + x^2} \\
\qquad \frac{1}{2}x^2 \quad - x \\
\qquad \underline{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x} \\
\qquad\qquad -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\
\qquad\qquad \underline{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

die weiteren Lösungen z. B. mit der $p-q-$Form

$$
\begin{aligned}
x_{2/3} &= -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} \\
&= -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} \\
&\Rightarrow x_2 = -1 \quad x_3 = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

b)

$$\prod_{i=1}^{4} i + \sum_{k=0}^{4} k + \sum_{l=1}^{3} 2 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 3\cdot 2 = 24 + 10 + 6 = 40$$

c)

$$4! + \sum_{k=0}^{3}(2k+1) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 + 1 + 3 + 5 + 7 = 24 + 16 = 40$$

Aufgabe 3

(6 Punkte) Oma Nym bietet nach n Besuchen die Summe von

$$S_1 = 20 + \sum_{i=1}^{n} 10 = 20 + n\cdot 10,$$

für Arnos Version ergibt sich (mit der Gauß-Summe)

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n} 0,5\cdot i = \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$

Arno gewinnt, wenn seine Summe größer ist, also

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} &> 20 + n \cdot 10 \\ n^2 + n &> 80 + 40n \\ n^2 - 39n - 80 &> 0 \end{aligned}$$

Die Lösungen der quadrat. Gleichung lauten $n_1 = -1,95$ und $n_2 = 40,95$, Arno gewinnt also nach insgesamt 41 Besuchen (die negative Lösung kann verworfen werden, weil die Summen nur positive Indizes liefern).

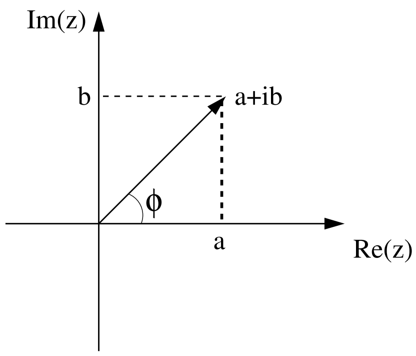
Aufgabe 4

(5 Punkte):

$$\begin{aligned} \sin(i) &= i - \frac{i^3}{3!} + \frac{i^5}{5!} - \frac{i^7}{7!} + ... \\ &= i\left(1 + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^5}{5!} + \frac{1^7}{7!} + ...\right) \quad = i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \cdot 1^{2k+1} = i \cdot \sinh(1) \end{aligned}$$

Aufgabe 5

(14 Punkte)

a) 

b) Kartesische Darstellung: mit $a = r\cos(\varphi), b = r\sin(\varphi)$ und $z_1 = a + ib$ folgt unter Ausnutzen von $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$z_1 = a + ib = 2\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot 2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 + i \cdot 2$$

c) der Betrag $|z|$ ist natürlich $r = 2\sqrt{2} = \sqrt{a^2+b^2}$, die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z_1} = 2 - i \cdot 2$.

d)

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (2+2i)(1+2i) = 2 + 4i + 2i + 4i^2 \\ &= 2 + 6i - 4 = -2 + 6i \\ \frac{z_2}{z_1} &= \frac{z_2 \cdot \overline{z_1}}{z_1 \cdot \overline{z_1}} = \frac{1}{|\overline{z_1}|^2} \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} = \frac{(1+2i)(2-2i)}{(2\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{6+2i}{8} = \frac{1}{4}(3+i) \end{aligned}$$

Aufgabe 6

(7 Punkte):

i) Induktionsanfang: mit $n_0 = 1$

$$1^1 = \frac{1}{2}1^2 + \frac{1}{2}1$$

ii) Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} + (n+1) \\ &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + n + 1 = \frac{n^2 + n + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1 + n + 1}{2} = \frac{(n+1)^2 + n + 1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1) \end{aligned}$$

Aufgabe 7

(5 Punkte):

$$f(x) = \begin{cases} 8a + 16x & x < 2 \\ a^2(x+2) & x \geq 2 \end{cases}$$

Die Funktion ist stetig in $x = 2$, wenn

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} a^2(x+2) = 4a^2 = \lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} 8a + 16x = 8a + 32$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 = 8a + 32 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 8 = 0$$

Die beiden Lösungen sind $x_1 = 4$ und $x_2 = -2$