Musterlösung zur Klausur Mathematik 3 TMM15

M. Oettinger 22.12.2016

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 54, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

Integrale (10 Punkte):

(a) Substitution: $u(x) = \cos(x)$:

$$\frac{du}{dx} = -\sin(x) \Rightarrow dx = -\frac{du}{\sin(x)}$$

$$\int \sin(x)e^{-\cos(x)}dx = \int \sin(x)e^{-u} - \frac{du}{\sin(x)} = -\int e^{-u}du$$

$$= -\left(-e^{-u}\right) + C = e^{-u} + C$$

Rücksubstitution:

$$\int \sin(x)e^{-\cos(x)}dx = e^{-\cos(x)} + C$$

(b) Nutzt man aus, dass $\cos(-x) = \cos(x)$:

$$\int_0^\pi (\cos(-x))^2 + (\sin(x))^2\,dx = \int_0^\pi (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2\,dx$$

und $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, so folgt

$$\int_0^\pi (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2\,dx = \int_0^\pi 1dx = [x]_0^\pi = \pi$$

(c) Trick: $\ln(x) = 1 \cdot \ln(x)$, partielle Integration mit $u' = 1 \Rightarrow u = x$ und $v = \ln(x) \Rightarrow v' = 1/x$:

$$\int 1 \cdot \ln(x)dx = x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\ln(x) - x + C$$

Aufgabe 2

(6 Punkte)
Doppelintegral des halben Kreisringes (in Polarkoordinaten, weil es sich um einen Bereich mit Rotationssymmetrie handelt) (6 Punkte):

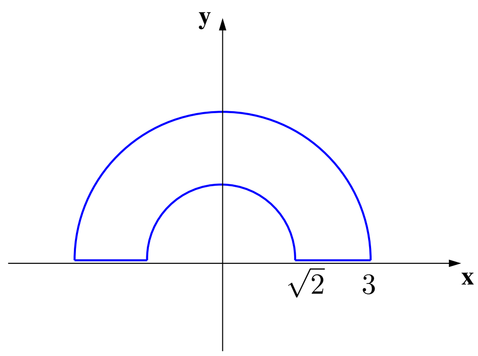

Abbildung 1: Skizze des Bereichs (A)

$$A = \iint\limits_{(A)} dA; \qquad y \geq 0;\ 2 \leq x^2 + y^2 < 9.$$

$$\iint\limits_{(A)} dA = \int\limits_{r=\sqrt{2}}^{3} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} r dr d\varphi = \int\limits_{r=\sqrt{2}}^{3} \pi r dr = \pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_{\sqrt{2}}^{3} = \pi \frac{9-2}{2} = \frac{7\pi}{2}$$

Aufgabe 3

(12 Punkte)
Es handelt sich um eine lineare, inhomogene DGL 1.Ordnung. Lösung über Variation der Konstanten: die zugehörige homogene DGL ist

$$\begin{aligned} y_0' + \sin(x) y_0 &= 0 \\ \frac{dy_0}{y_0} &= -\sin(x) dx \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{y_0} dy_0 = -\int \sin(x) dx \\ y_0(x) &= C e^{\cos(x)} \end{aligned}$$

Lösung der inhomogenen DGL durch Variation der Konstanten:

$$y(x) = C(x)e^{\cos(x)} \quad \text{als Ansatz zur Lösung}$$
$$y'(x) = C'(x)e^{\cos(x)} + C(x)e^{\cos(x)}(-\sin(x))$$

eingesetzt in die DGL

$$C'(x)e^{\cos(x)} + C(x)e^{\cos(x)}(-\sin(x)) + \sin(x)C(x)e^{\cos(x)} = 3\sin(x)$$
$$C'(x) = 3\sin(x)e^{-\cos(x)}$$
$$C(x) = 3\int \sin(x)e^{-\cos(x)}dx$$

Substitution: $u(x) = \cos(x)$ (siehe Aufgabe 1a)):

$$\frac{du}{dx} = -\sin(x) \Rightarrow dx = -\frac{du}{\sin(x)}$$
$$3\int \sin(x)e^{-\cos(x)}dx = 3\int \sin(x)e^{-u}\left(-\frac{du}{\sin(x)}\right)$$
$$= -3\int e^{-u}du = -3(-e^{-u}) + C = 3e^{-u} + C$$

Rücksubstitution:

$$C(x) = 3\int \sin(x)e^{-\cos(x)}dx = 3e^{-\cos(x)} + C$$

Damit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL bestimmt:

$$y(x) = C(x)e^{\cos(x)} = \left(3e^{-\cos(x)} + C\right)e^{\cos(x)} = 3 + Ce^{\cos(x)}$$

Aufgabe 4

(9 Punkte)
Die zugehörige homogene DGL

$$\dot{I}_0 + \frac{R}{L}I_0 = 0$$

wird für beide Verfahren benötigt, sie kann über Trennung der Variablen gelöst werden:

$$\begin{aligned} \dot{I}_0 = -\frac{R}{L} I(t) \Leftrightarrow \int \frac{dI_0}{I_0} &= -\int \frac{R}{L} dt \\ \ln |I_0| &= -\frac{R}{L} t + \ln |C| \\ I_0(t) &= C \cdot e^{-\frac{R}{L} t}. \end{aligned}$$

Die Lösung der inhomogenen DGL über das Aufsuchen einer partikulären Lösung: der Störterm ist konstant, also wählen wir als Ansatz

$$I_p(t) = A \quad \Rightarrow \dot{I}_p(t) = 0$$

in die DGL eingesetzt

$$\begin{aligned} 0 + \frac{R}{L} A &= \frac{U_0}{L} \\ I_p(t) = A &= \frac{U_0}{R} \\ I(t) = I_0(t) + I_p(t) &= \frac{U_0}{R} + C \cdot e^{-\frac{R}{L} t} \end{aligned}$$

Aufgabe 5

(7 Punkte)
$f(x) = \pi \cdot \sin(x)$ soll in eine Fourierreihe entwickelt werden:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \pi \cdot \sin(x) dx = \int_0^{2\pi} \sin(x) dx = 0 \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \pi \cdot \sin(x) \cos(nx) dx = \int_0^{2\pi} \sin(x) \cos(nx) dx = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \pi \cdot \sin(x) \sin(nx) dx = \int_0^{2\pi} \sin(x) \sin(nx) dx = \begin{cases} \pi & \text{für} \quad n = 1 \\ 0 & \text{für} \quad n \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Als einziger Term bleibt also $b_1 = \pi$, in die Fourier-Reihe eingesetzt folgt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = b_1 \sin(1 \cdot x) = \pi \cdot \sin(x).$$

Einfacher findet man die Lösung, wenn man ausnutzt, dass der Sinus ungerade ist, es müssen also alle geraden Terme verschwinden ($a_0 = 0, a_n = 0$). Schreibt man die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) + \dots$$

aus, erkennt man über einen einfachen Koeffizientenvergleich sofort, dass $b_1 = \pi$.

Aufgabe 6

(10 Punkte)

a) Die Differentialgleichung aus der Kirchhoffschen Maschenregel:

$$\begin{aligned} u_L(t) + u_0 \cos(\omega t) &= -L\frac{di(t)}{dt} + u_0 \cos(\omega t) = 0 \\ \frac{di(t)}{dt} &= \frac{u_0}{L} \cos(\omega t) \\ \int 1 \cdot di &= \frac{u_0}{L} \int \cos(\omega t) dt \\ i(t) &= \frac{u_0}{L\omega} \sin(\omega t) + C \end{aligned}$$

Die Konstante ergibt sich aus $i(0) = 0$ zu $C = 0$, also ist

$$i(t) = \frac{u_0}{L\omega} \sin(\omega t)$$

b) Die DGL Laplace-transformierte (es ist $i(0) = 0$):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\frac{di(t)}{dt}\} &= \frac{u_0}{L}\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} \\ s \cdot \mathcal{L}\{i(t)\} - i(0) &= \frac{u_0}{L}\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} \\ s \cdot I(s) &= \frac{u_0}{L} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ I(s) &= \frac{u_0}{L} \frac{1}{s^2 + \omega^2} = \frac{u_0}{\omega L} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Rücktransformation liefert sofort

$$i(t) = \frac{u_0}{\omega L}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\} = \frac{u_0}{\omega L} \sin(\omega t)$$