Aufgabe 1

Berechnen Sie die Integrale (10 Punkte)

a)

$$\int e^x(1+x)dx$$

b)

$$\int x \cdot \cos(3x)dx$$

c)

$$\int_0^{\sqrt{\pi/3}} 2x\sin(3x^2)dx$$

Aufgabe 2

Skizzieren Sie die durch

$$x \geq 0; y \geq 0; 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

gegebene Fläche und berechnen Sie den Flächeninhalt über ein Doppelintegral.
(6 Punkte)

Aufgabe 3

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'^2 - 2xy' - 2y + 2x^2 = 0$$

(a) Zeigen sie, dass die Funktion $y(x) = (x+C)^2 + C^2$, $(x > 0)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

(b) Zeigen sie, dass die Funktion $y(x) = \frac{x^2}{2}$ ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung ist.

(c) Wie nennt man die Lösung in a), wie die Lösung in b)?

(6 Punkte)

Aufgabe 4

Finden Sie alle Lösungen der DGL

$$y'(x) = \frac{2x}{\cos(y)}.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 5

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) - 3 \cdot y(x) = 2x - 3 \;\; ; \;\; y(0) = \frac{1}{3}.$$

Um was für eine DGL handelt es sich? Existieren neben der gefundenen noch weitere Lösungen? (8 Punkte)

Aufgabe 6

(a) Klassifizieren Sie die beiden Differentialgleichungen

$$y' + 2y = e^{2y} \tag{1}$$
$$y'' + \sin(y) - 2x = 0 \tag{2}$$

(linear/nicht-linear, homogen, Ordnung?)

(b) Wieviele Lösungen besitzt die DGL (1)?

(c) Wieviele Lösungen besitzt die DGL (2)?

(d) Wieviele Lösungen besitzt das Anfangswertproblem zur DGL (2)

$$y'' + \sin(y) - 2x = 0 \qquad y(0) = -127; y'(0) = 22?$$

(6 Punkte)

Aufgabe 7

Die Funktion $f(x) = 7b$ kann wegen $f(x) = f(x+2\pi)\forall x \in \mathbb{R}$ als 2π-periodisch betrachtet werden, sie genügt außerdem den Dirichletschen Bedingungen und kann in eine Fouriereihe der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)$$

entwickelt werden. Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten a_n und b_n.
(6 Punkte)

Aufgabe 8

Alice kreuzt mit ihrer Privatrakete durchs All. Die Rakete hat hübsche pinkfarbene Streifen und besitzt einen neuartigen Antrieb, der sie mit konstanter Beschleunigung antreibt, ohne die Masse m des Raumschiffs zu verändern. Alice startet bei $t = 0$ am Ort $z = 0$ mit einer konstanten Beschleunigung in z-Richtung, die Rakete hat zur Zeit $t = 0$ bereits eine Startgeschwindigkeit $v = 1$ in Richtung z. Sie befindet sich bereits tief im All und spürt keine Gravitation anderer Himmelskörper.

(a) Wie sieht die Differentialgleichung zur Bestimmung der Bahn $z(t)$ aus, wenn man annimmt, dass die Masse des Raumschiffs konstant bleibt?

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung für die Bahnkurve $z(t)$ des Raumschiffs unter den gegebenen Randbedingungen.

(8 Punkte)