Musterlösung zur Nachklausur
Mathematik III
TMM15

9.2.2017

Aufgabe 1

(a) partielle Integration:

$$\int e^x(1+x)dx = (1+x)e^x - \int 1 \cdot e^x dx$$
$$= e^x + x \cdot e^x - e^x + C = x \cdot e^x + C.$$

(b) Partielle Integration:

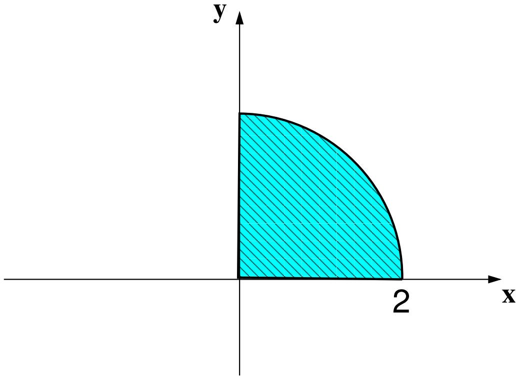
$$\int x \cdot \cos(3x)dx = x\frac{\sin(3x)}{3} - \int 1 \cdot \frac{\sin(3x)}{3}dx$$
$$= \frac{x\sin(3x)}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{(-1)\cos(3x)}{3} + C = \frac{3x\sin(3x)+\cos(3x)}{9} + C$$

(c)

$$\int_0^{\sqrt{\pi/3}} 2x\sin(3x^2)dx \quad \text{Substitution: } u = x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$
$$\int_0^{\sqrt{\pi/3}} 2x\sin(3x^2)dx = \int_{u=0}^{u=\sqrt{\pi/3}^2} 2x\sin(3u)\frac{du}{2x}$$
$$= \int_0^{\pi/3} \sin(3u)du = \frac{1}{3}\left[-\cos(3u)\right]_0^{\pi/3} = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 2

Bei der durch
$$x \geq 0; y \geq 0; 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$
gegebenen Fläche handelt es sich um einen Viertelkreis mit Radius $R = 2$:



In Polarkoordinaten (Rotationssymmetrie!)
$$\begin{aligned} A &= \iint dA = \int_{r=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} r dr d\varphi \\ &= \int_{r=0}^{2} [\varphi]_0^{\pi/2} \, r dr = \frac{\pi}{2} \int_0^2 r dr \qquad = \frac{\pi}{2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^2 = \pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Differentialgleichung
$$y'^2 - 2xy' - 2y + 2x^2 = 0$$

(a) $y(x) = (x+C)^2 + C^2$, $(x > 0)$ ist eine Lösung der DGL, wenn sie mit ihren Ableitungen die DGL identisch erfüllt:
$$\begin{aligned} y &= (x + C)^2 + C^2 = x^2 + 2xC + 2C^2 \\ y' &= 2x + 2C \end{aligned}$$

in die DGL:
$$\begin{aligned} &(2x + 2C)^2 - 2x(2x + 2C) - 2(x^2 + 2xC + 2C^2) + 2x^2 \\ =&(4x^2 - 8xC + 4C^2 - 4x^2 - 4xC - 2x^2 - 4xC - 4C^2 + 2x^2 \\ =&0 \end{aligned}$$

(b) $y(x) = x^2/2$ ist eine Lösung der DGL, wenn sie mit ihren Ableitungen die DGL identisch erfüllt:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2}{2} \\ y' &= \frac{2}{2}x = x \end{aligned}$$

in die DGL:

$$x^2 - 2xx - 2\frac{x^2}{2} + 2x^2 = x^2 - 2x^2 - x^2 + 2x^2 = 0$$

(c) Die Lösung in a) enthält einen freien Parameter, sie ist die allgemeine Lösung der DGL $y'^2 - 2xy' - 2y + 2x^2 = 0$. Die Lösung in b) ist eine spezielle (oder partikuläre Lösung).

Aufgabe 4

Lösung über Sepration der Variablen:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{2x}{\cos(y)} \quad \Longleftrightarrow \quad \cos(y)dy = 2xdx \\ \int \cos(y)dy &= \int 2xdx \\ \sin(y) &= \frac{2}{2}x^2 + C \quad \Rightarrow \quad y(x) = \arcsin\left(x^2 + C\right) \end{aligned}$$

ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Aufgabe 5

Es handelt sich um eine inhomogene, lineare und gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung. Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $y_0' - 3y_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \int \frac{y_0}{dy_0} &= \int 3dx \\ &\Rightarrow y_0(x) = C \cdot e^{3x}. \end{aligned}$$

Störterm ist $g(x) = 2x - 3$, der Ansatz zur Lösung der inhomogenen DGL ist linear:

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= Ax + B \\
y_p'(x) &= A \\
y'(x) - 3 \cdot y(x) = 2x - 3 &\Leftrightarrow A - 3(Ax + B) = 2x - 3 \\
&\Rightarrow A = -\frac{2}{3};\ B = \frac{7}{9} \\
y_p(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{7}{9}
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der DGL lautet also

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = C \cdot e^{3x} - \frac{2}{3}x + \frac{7}{9}.$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$\begin{aligned}
y(0) = C + \frac{7}{9} &= \frac{1}{3} \\
\Rightarrow\ C &= -\frac{4}{9}.
\end{aligned}$$

Es ist die einzige Lösung - durch die Anfangsbedingung ist der freie Parameter festgelegt.

Aufgabe 6

(a)

$$y' + 2y = e^{2y} \tag{1}$$

$$F(y'', \sin(y), 2x) = 0 \tag{2}$$

Gleichung (1) ist eine nichtlineare, homogene und gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung.
Gleichung (2) ist eine nichtlineare, inhomogene und gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung.

(b) Die allgemeine Lösung der DGL (1) enthält (DGL 1. Ordnung) einen freien Parameter - sie hat unendliche viele Lösungen.

(c) Die allgemeine Lösung der DGL (2) enthält (DGL 2. Ordnung) zwei freie Parameter - sie hat unendliche viele Lösungen.

(d) Durch die Randbedingungen werden beide Parameter festgelegt, es bleibt genau eine Lösung.

Aufgabe 7

Ausschreiben der Fourierreihe liefert die Lösung über einen einfachen Koeffizientenvergleich:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx) \\
7b &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos(x) + b_1 \cdot \sin(x) + a_2 \cdot \cos(2x) + b_2 \cdot \sin(nx) + \dots \\
&\Rightarrow 7b = \frac{a_0}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = 14b \\
&\Rightarrow a_n = 0 \forall n > 0; \quad b_n = 0.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8

Das Raumschiff der Masse m erfährt eine Kraft $F = const$, es beschleunigt nach

$$F = m \cdot a \;\Leftrightarrow\; F = m\ddot{z(t)}$$

(a) Das Einschalten zum Zeitpunkt $t = 0$ kann über die Heaviside-Funktion modelliert werden

$$H : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}, t \to \begin{cases} 0, \text{ falls } t \leq 0 \\ 1 \text{ falls } t > 0 \end{cases},$$

also ergibt sich für die zu lösende DGL

$$\frac{d^2}{dt^2} z(t) - \frac{F}{m} H(t) = 0.$$

oder für $t > 0$

$$\frac{d^2}{dt^2} z(t) - \frac{F}{m} = 0.$$

(b) Lösung der DGL in zwei Schritten:

$$\ddot{z} = \frac{F}{m} = K$$

$$\int \ddot{z} dt = \int K dt \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = K \cdot t + C$$

mit $\dot{z}(t=0) = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 1$

$$\int \dot{z} dt = \int Kt + 1 dt \quad \Rightarrow \quad z(t) = K\frac{t^2}{2} + 1 \cdot t + C$$

mit $z(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$

$$\Rightarrow z(t) = K\frac{t^2}{2} + t = \frac{F}{2m}t^2 + t$$