Musterlösung zur Klausur Mathematik 2 TMM15

M. Oettinger 30.6.2016

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(8 Punkte)
Die Funktion $P(x)$ beschreibt den Wert des Produkts aus Vorgänger und Nachfolger der Zahl x:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)\cdot(x+1) = x^2 - 1 \\ P'(x) &= 2x \\ P''(x) &= 2 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Minumums wird die erste Ableitung Null gesetzt:

$$\begin{aligned} 2x = 0 &\Leftrightarrow x_0 = 0 \\ P''(x_0) = 2 > 0 &\quad\Rightarrow\quad \text{Minimum} \end{aligned}$$

Die Form der Kurve lässt sich dem Ausdruck $P(x) = x^2 - 1$ direkt entnehmen - es handelt sich um eine um den Betrag 1 nach unten verschobene Normalparabel, die nur für $x \in \mathbb{Z}$ definiert ist.

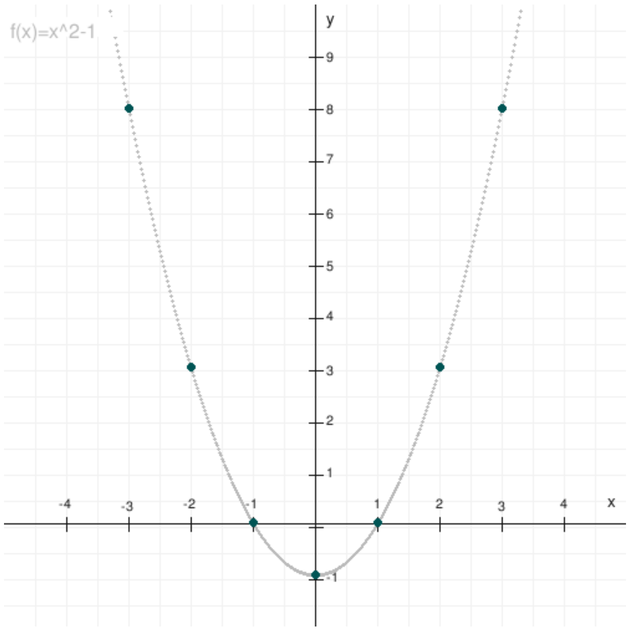

Abbildung 1: Die Funktion $P(x)$.

Aufgabe 2

(8 Punkte)
Die Tangente ist

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
$$f(x_0) = \frac{1^2}{-2} = -\frac{1}{2}$$

die erste Ableitung der Funktion

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - (x+1)^2}{(x-2)^2} = \frac{2x + 2 - (x^2 + 2x + 1)}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{x^2+1}{(x-2)^2},$$
$$\Rightarrow f'(x_0 = 0) = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$$

Damit ist die Tangentengleichung

$$t(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x - 0) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x$$

Wegen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

ist die Tangentengleichung natürlich genau das MacLaurin-Polynom bis $n = 1$.

Aufgabe 3

(11 Punkte)
Ableitung von Funktionen.

a)

$$\left(e^{3x} \cdot 2x\right)' = 3e^{3x} \cdot 2x + e^{3x} \cdot 2 = e^{3x}(6x + 2)$$

b)

$$\left(e^{x^3} \cdot 2x^2\right)' = e^{x^3} \cdot 3x^2 \cdot 2x^2 + e^{x^3} \cdot 2 \cdot 2x = e^{x^3}(6x^4 + 4x)$$

c)

$$\begin{aligned}\left((\sin(x) + \cos(x))^2\right)' &= 2(\sin(x) + \cos(x))(\cos(x) - \sin(x)) \\ &= 2 \cdot (\cos^2(x) - \sin^2(x)) = 2 \cdot (\cos^2(x) - (1 - \cos^2(x))) \\ &= 4\cos^2(x) - 2\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{x^2 + 1 + 1^2} \quad \text{mit } f(x) \geq 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{2}\left(x^2 + 2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}.\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}f(x) &= \left| \sqrt{x^2 + 2x + 1} \right| = \left| \sqrt{(x + 1)^2} \right| = x + 1 \\ f'(x) &= 1\end{aligned}$$

Aufgabe 4

(20 Punkte)
Kurvendiskussion:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Die benötigten Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^3 - 4x \\ f''(x) &= 3x^2 - 4 \\ f^{(3)}(x) &= 6x \end{aligned}$$

Symmetrie: es gilt

$$f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - 2(-x)^2 - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} = f(x)$$

Die Funktion ist also gerade (sie enthält nur gerade Potenzen von x).

Nullstellen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} &= 0 \\ x^4 - 8x^2 - 9 = x^4 - 2 \cdot 4x^2 + 16 - 16 - 9 &= (x^2+4)^2 - 25 = 0 \\ x^2 + 4 &= \pm\sqrt{25} = \pm 5 \\ x^2 &= \pm 1 \quad \Rightarrow x_{1/2} = \pm 1 \end{aligned}$$

Extrema:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^3 - 4x = x(x^2-4) = 0 \\ x_3 &= 0 \\ x^2 - 4 &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{4/5} = \pm 2. \\ f''(0) &= -4 < 0; \quad f(0) = -\frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum bei } (0/\frac{9}{4}) \\ f''(\pm 2) &= 12 - 4 = 8 > 0 \\ f(\pm 2) &= 4 - 8 - \frac{9}{4} = \frac{-16-9}{4} = -\frac{25}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{Minima bei } (\pm 2/-6,25). \end{aligned}$$

Wendestellen:

$$f''(x) = 3x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{6/7} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}.$$

$$f^{(3}(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}) = \pm 6\sqrt{\frac{4}{3}} \neq 0$$

$$f(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}) = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2\frac{4}{3} - \frac{9}{4} = \frac{4-24}{9} - \frac{9}{4} = -\frac{161}{36}$$

Krümmungsverhalten: vor der ersten Wendestelle: z.B. $x = -2 < \sqrt{\frac{4}{3}}$:

$$f''(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 4 = 8 > 0 \quad \Rightarrow \text{ linksgekrümmt,}$$

also ist die Funktion zwischen den Wendepunkten rechtsgekrümmt, nach dem 2. Wendepunkt wieder linksgekrümmt.

Verhalten für große/kleine Werte:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} = \lim_{x\to\pm\infty} x^4 \cdot \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{x^2} - \frac{9}{4x^4}\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x^4 \cdot \frac{1}{4} = \infty$$

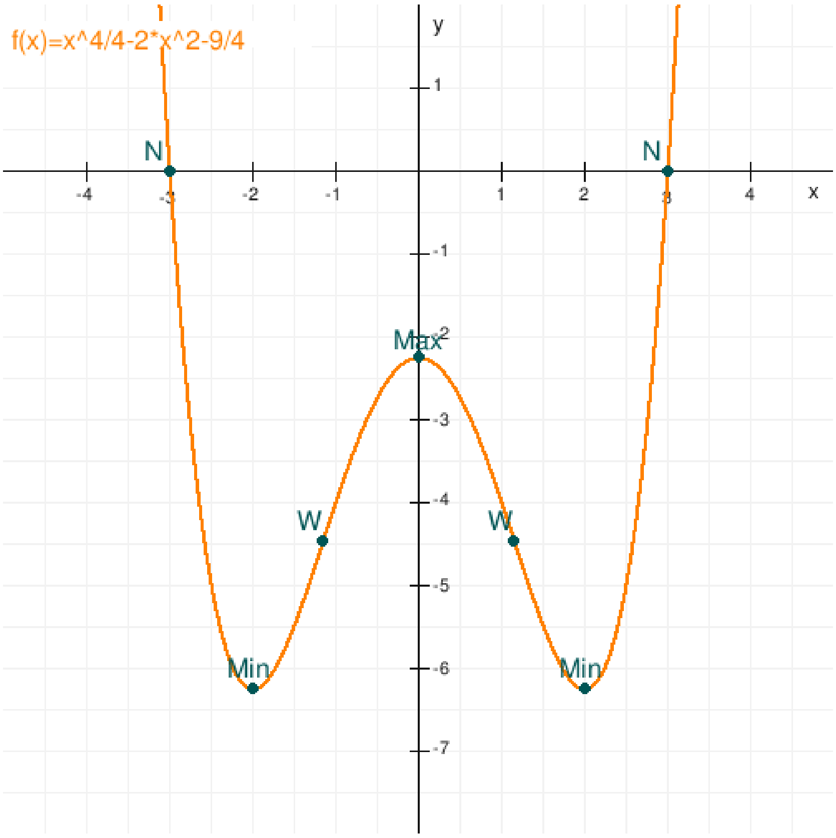

Abbildung 2: Skizze der Funktion.

Aufgabe 5

(8 Punkte)

$$\sqrt{2,1} = (2,1)^{1/2}\,,$$

es liegt nahe, die Funktion

$$f(x) = \sqrt{2+x} = (2+x)^{1/2}$$

um die Stelle $x_0 = 0$ zu entwickeln:

$$f(x) = \sqrt{2+x} \;\Rightarrow\; f(0) = \sqrt{2}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}\,(2+x)^{-1/2} \;\Rightarrow\; f'(0) = \frac{1}{2}\,(2)^{-1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Also ist das Taylorpolynom

$$T_1(x) = f(0) + f'(0) \cdot x = \sqrt{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x$$

und die Funktion

$$\begin{aligned}
f(x) &\approx T_1(x) \\
\frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2}} &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} T_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x \right) \\
\frac{\sqrt{2,1}}{\sqrt{2}} &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} T_1(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0,1 \right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} \cdot 0,1 = 1 + \frac{1}{40} = 1,025.
\end{aligned}$$