Übungsklausur Mathematik II

TMM15

23.06.2016
Zeit: 90Min.
Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(11 Punkte)

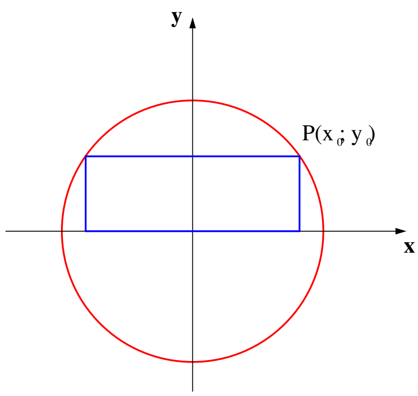

Abbildung 1: Rechteck im Halbkreis.

In einen Halbkreis, gegeben durch die Gleichung $r^2 = x^2 + y^2$ mit $y \geq 0$, wird ein Rechteck mit zwei Eckpunkten auf dem Umfang einbeschrieben (vgl. Abb. 1). Welche Koordinaten muss P haben, damit die Fläche des Rechtecks ein Maximum annimmt?

Aufgabe 2

Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

in eine Taylorreihe um die Stelle $x_0 = 0$ (MacLaurin - Reihe). Was kann man dem Ergebnis entnehmen?

Aufgabe 3

(12 Punkte)

a) Bestimmen Sie a so, dass die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^{3} + ax^{2} + 2$$

in $x = 2$ eine Extremstelle hat. Um welche Art von Extremstelle handelt es sich ?

b) Bestimmen Sie alle Punkte $(x_0; y_0)$, an denen eine Tangente mit der Steigung $m = 4/3$ an das Schaubild der oben bestimmten Funktion f angelegt werden kann. Geben Sie die Gleichungen dieser Tangenten an.

c) Wie verhält sich die Funktion für $x \to \pm\infty$?

d) Skizzieren Sie die Funktion in einem passend gewählten Bereich.

Aufgabe 4

(15 Punkte)
Gegeben ist die Funktion:

$$f : x \longmapsto e^{x}(x^{2} - 5x + 5); x \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie Nullstellen, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrema/Wendestellen und das Verhalten für große/kleine Variablenwerte. Zeichnen (Skizze!) Sie die Funktion in einem geeigneten Intervall.

Aufgabe 5

(8 Punkte)
Berechnen Sie mit Hilfe des Grenzwerts

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

die Ableitung der Funktion $f(x) = x^3$.

Aufgabe 6

(8 Punkte)
Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

auf Konvergenz. Berechnen Sie den Wert der Summe (Hinweis: das Folgenglied kann als Differenz zweier Brüche ausgedrückt werden, der Wert der Summe ist der Grenzwert der Partialsummen für $n \to \infty$).

Berechnen Sie mit dem Ergebnis die Funktion

$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \right) + \left(\frac{(ix)^k}{k!} \right)$$

und geben Sie den Wert $f(x_0)$ für $x_0 = \pi$ an.