Musterlösung zur Übungsklausur Mathematik 1 TMM15

M. Oettinger 3.2016

Zeit: 90Min.

Aufgabe 1

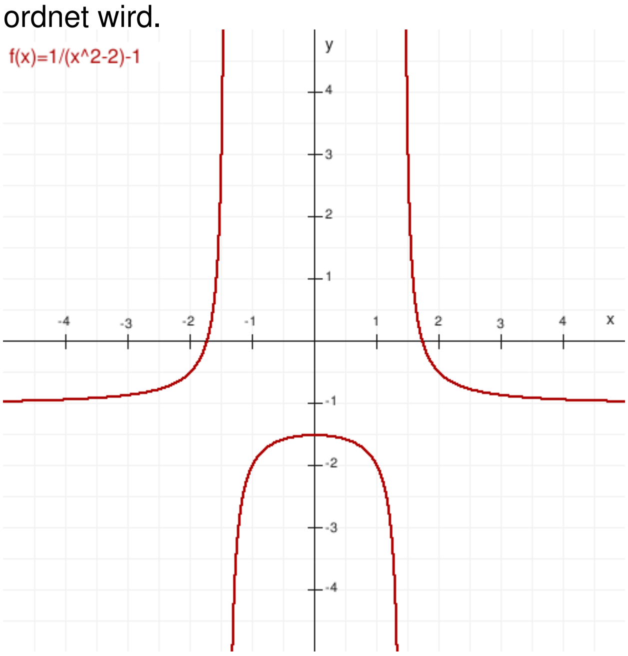
(14 Punkte):
$$r_1(x) = e^{|x|}, \quad r_2(x) = e^{|-x|}$$

a) Es handelt sich um Funktionen, jedem Wert $x \in \mathbb{R}$ ist eindeutig ein Funktionswert $y = e^{|x|}$ zugeordnet. Dabei gilt natürlich $r_1(x) = r_2(x)$.

b) Betragsfreie Form:
$$r_1(x) = r_2(x) = \begin{cases} e^x & \text{für } x \geq 0 \\ e^{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$
Es gilt
$$r_1(-x) = e^{-(-x)} = e^x = r_1(x),$$
also handelt es sich um eine gerade Funktion (spiegelsymmetrisch zur y-Achse).

c) Nullstellen:
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2-2} - 1 = 0 \\ \frac{1}{x^2-2} &= 1 \\ 1 &= x^2 - 2 \quad \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$
Schnittpunkt mit der y-Achse:
$$f(0) = \frac{1}{0^2-2} - 1 = -\frac{1}{2} - 1 = -frac32$$
Symmetrie:
$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2-2} - 1 = \frac{1}{x^2-2} - 1 = f(x)$$

Die Relation ist symmetrisch zur y-Achse (gerade). Sie ist aber keine Funktion, da den beiden Variablenwerten $\pm\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ kein Funktionswert zugeordnet wird.



Aufgabe 2

a)

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 1 \\ 1 & 13 & -2 \end{pmatrix}$$

b)

$$C \cdot v = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 1 \\ 1 & 13 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 15 \end{pmatrix}$$

c) Die Matrix D ist die Einheitsmatrix, also ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Wird der Zeitpunkt der Verhandlung mit dem Index $n = 1$ bezeichnet, so bietet Oma Nym nach n Besuchen die Summe von

$$S_1 = 10 + \sum_{i=1}^{n} 10 = 10 + n \cdot 10,$$

für Arnos Version ergibt sich (mit der Gauß-Summe)

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n} 0,5 \cdot i = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

Arno gewinnt, wenn seine Summe größer ist, also

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} &> 10 + n \cdot 10 \\ n^2 + n &> 40 + 40n \\ n^2 - 39n - 40 &> 0 \end{aligned}$$

Die Lösungen der quadrat. Gleichung lauten $n_1 = -1$ und $n_2 = 40$, Arno gewinnt also nach insgesamt 41 Besuchen (die negative Lösung kann verworfen werden, weil die Summen nur für positive Indizes einen Beitrag liefern).

Aufgabe 4

(a) Q entsteht aus P durch Spiegelung an der y-Achse, also

$$Q = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

beschreiben. Die Matrixgleichung $AP = Q$ beschreibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= -x_1 & &\Rightarrow a_{11} = -1; a_{12} = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= x_2 & &\Rightarrow a_{21} = 0; a_{22} = 1 \\ A &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Bei einer Spiegelung an der x-Achse ergibt sich aus P der Punkt

$$R = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

Die zugehörige Matrix B kann analog berechnet werden:

$$b_{11}x_1 + b_{12}x_2 = x_1 \qquad \Rightarrow b_{11} = 1; b_{12} = 0$$
$$b_{21}x_1 + b_{22}x_2 = -x_2 \qquad \Rightarrow b_{21} = 0; b_{22} = -1$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Die Matrix C überführt den Punkt P in $-P$, also

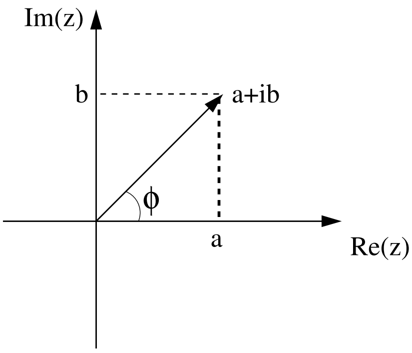
$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Das Produkt $A \cdot B$ ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = C$$

Daraus kann geschlossen werden, dass die Punktspiegelung am Ursprung durch zwei Spiegelungen an den Koordinatenachsen ausgedrückt werden kann.

Aufgabe 5



a)

b) Kartesische Darstellung: mit $a = r\cos(\varphi), b = r\sin(\varphi)$ und $z = a + ib$ folgt unter Ausnutzen von $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$z = a + ib = 2\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot 2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 + i \cdot 2$$

c) der Betrag $|z|$ ist natürlich $r = 2\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + b^2}$, die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z} = 2 - i \cdot 2$

Aufgabe 6

(7 Punkte):

i) Induktionsanfang: mit $n_0 = 1$

$$1^1 = \frac{1}{2}1^2 + \frac{1}{2}1$$

ii) Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} +(n+1) \\
&= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + n + 1 = \frac{n^2 + n + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{n^2 + 2n + 1 + n + 1}{2} = \frac{(n+1)^2 + n + 1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1)
\end{aligned}$$

Aufgabe 7

Berechnung des Würfels, dessen Volumen um 271cm^3 wächst, wenn die Kante um 1cm verlängert wird :

$$\begin{aligned}
(a+1)^3 &= (a+1)(a+1)(a+1) = a^3 + 271 \\
(a^2 + 2 \cdot a + 1)(a+1) &= a^3 + a^2 + 2a^2 + 2a + a + 1 \\
&= a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = a^3 + 271 \\
3a^2 + 3a + 1 &= 271 \\
a^2 + a + 90 &= 0 \\
a^2 + \frac{2}{2}a + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 90 &= 0 \\
(a + \frac{1}{2})^2 &= 90\frac{1}{4} = \frac{361}{4} \\
a &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{361}{4}} = \frac{-1 \pm 19}{2} \\
&\Rightarrow a_1 = \frac{18}{2} = 9, \quad a_2 = \frac{-20}{2} = -10
\end{aligned}$$