Musterlösung zur Übungsklausur Mathematik III TMM16

14.12.2017

Aufgabe 1

(a) $f(x) = x \cdot \sin(x)$ über partielle Intergration:

$$\int x \cdot \sin(x) dx = [x(-\cos(x)] - \int 1 \cdot (-\cos(x)) dx$$
$$= -x \cos(x) + \sin(x) + C$$

(b)

$$\int \cos^2(x) \cdot \tan(x) dx = \int \cos^2(x) \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int \cos(x) \sin(x) dx$$
$$= \int u \cdot \cos(x) \frac{du}{\cos(x)} = \int u du = \frac{u^2}{2} + C$$

Rücksubstitution:

$$= \frac{\sin^2(x)}{2} + C$$

(c) $\int 2xe^{x^2} dx$: Substitution $u(x) = x^2$, also

$$\frac{du(x)}{dx} = 2x \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{du}{2x}$$
$$\int 2xe^{x^2} dx = \int 2xe^u \frac{du}{2x} = \int e^u du = e^u + C$$

Rücksubstitution:

$$\int 2xe^{x^2} dx = e^{x^2} + C$$

Aufgabe 2

Bei der durch $x \geq 0; y \geq 0; 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ gegebenen Fläche handelt es sich um einen Viertelkreis mit Radius $R = 2$:

`ViertelKreis.pdf`

In Polarkoordinaten (Rotationssymmetrie!) $y = r\sin(\varphi), \quad dA = r dr d\varphi$:

$$\int\limits_{r=0}^{2} \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{3} r \sin(\varphi) r dr d\varphi = \frac{4}{3} \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 \sin(\varphi) d\varphi = \frac{4}{3}\frac{8}{3} \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi) d\varphi$$

$$= \frac{32}{9} \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi) d\varphi = \frac{32}{9} \left[-\cos(\varphi)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{32}{9} \Big(-\cos(\frac{\pi}{2}) - \cos(0)\Big) = \frac{32}{9}$$

Aufgabe 3

Differentialgleichung

$$y'^2 - 2xy' - 2y + 2x^2 = 0$$

(a) $y(x) = (x+C)^2+C^2$, $(x > 0)$ ist eine Lösung der DGL, wenn sie mit ihren Ableitungen die DGL identisch erfüllt:

$$\begin{aligned} y &= (x+C)^2 + C^2 = x^2 + 2xC + 2C^2 \\ y' &= 2x + 2C \end{aligned}$$

in die DGL:

$$\begin{aligned} &(2x+2C)^2 - 2x(2x+2C) - 2(x^2+2xC+2C^2) + 2x^2 \\ =&(4x^2 - 8xC + 4C^2 - 4x^2 - 4xC - 2x^2 - 4xC - 4C^2 + 2x^2 \\ =&0 \end{aligned}$$

(b) $y(x) = x^2/2$ ist eine Lösung der DGL, wenn sie mit ihren Ableitungen die DGL identisch erfüllt:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2}{2} \\ y' &= \frac{2}{2}x = x \end{aligned}$$

in die DGL:

$$x^2 - 2xx - 2\frac{x^2}{2} + 2x^2 = x^2 - 2x^2 - x^2 + 2x^2 = 0$$

(c) Die Lösung in a) enthält einen freien Parameter, sie ist die allgemeine Lösung der DGL $y'^2 - 2xy' - 2y + 2x^2 = 0$. Die Lösung in b) ist eine spezielle (oder partikuläre Lösung).

Aufgabe 4

Es handelt sich um eine lineare, inhomogene und gewöhnliche DGL 1.Ordnung. Lösung über Variation der Konstanten: die zugehörige homogene DGL ist

$$\begin{aligned} y_0'(x) + 2\lambda y_0(x) &= 0 \\ \frac{dy_0}{dx} &= -2\lambda y_0 \\ \frac{dy_0}{y_0} &= -2\lambda dx \\ \int \frac{dy_0}{y_0} &= -2\lambda \int dx \\ y_0(x) &= C \cdot e^{-2\lambda x} \end{aligned}$$

Lösung der inhomogenen DGL durch Variation der Konstanten:

$$y(x) = C(x) \cdot e^{-2\lambda x}$$
$$y'(x) = C'(x)e^{-2\lambda x} - C(x)2\lambda e^{-2\lambda x}$$

eingesetzt in die DGL

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-2\lambda x} - C(x)2\lambda e^{-2\lambda x} + C(x)2\lambda e^{-2\lambda x} &= e^{-2\lambda x}x^2 \\ C'(x)e^{-2\lambda x} &= e^{-2\lambda x}x^2 \\ C'(x) &= x^2 \\ C(x) &= \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lautet also

$$y(x) = (\frac{x^3}{3} + C)e^{-2\lambda x}.$$

Aufgabe 5

Anfangswertproblem (10 Punkte):

$$2xy' - y = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \qquad y \to -1 \text{ für } x \to \infty$$

Es handelt sich um eine lineare inhomogene Differentialgleichung 1.Ordnung. Die zugehörige homogene Gleichung $2xy' - y = 0$ kann durch Trennung der Variablen gelöst werden:

$$f(x) = \frac{1}{2x}, \quad y_0 = Ce^{\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx}$$

$$= Ce^{\frac{1}{2}\ln|x|} = Ce^{\ln|\sqrt{x}|} = C \cdot \sqrt{x}$$

Die inhomogene Gleichung wird durch Variation der Konstanten gelöst:

Ansatz: $y = C(x)\sqrt{x}$,

$$y' = C'(x)\sqrt{x} + C(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

eingesetzt in die inhomogene Gleichung $2xy' - y = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
2xC'(x)\sqrt{x} + \underbrace{\frac{2x}{2\sqrt{x}}C(x) - C(x)\sqrt{x}}_{=0} &= 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \\
2xC'(x)\sqrt{x} &= 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \\
C'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}2x\sqrt{x}} &= \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{x^2} \\
C(x) = \frac{1}{2}\int x^{-\frac{3}{2}}dx - \int \frac{1}{x^2}dx &= \frac{1}{2}(-2)x^{-\frac{1}{2}} - (-1)\frac{1}{x} + K \\
&= -\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + K
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet also

$$y(x) = C(x)\sqrt{x} = -1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + K\sqrt{x}$$

Bestimmung der Lösung des Anfangswertproblems (Bestimmung des freien Parameters K): $y \to -1$ für $x \to \infty$:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0 \text{ für } x \to \infty \Longrightarrow -1 + K\sqrt{x} \to -1 \text{ für } x \to \infty$$

$$\Longrightarrow K = 0.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$y(x) = -1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Aufgabe 6

(a)

$$y' + 2y = e^{2y} \tag{1}$$

$$y'' - y + 4x = 0 \tag{2}$$

Gleichung (1) ist eine nichtlineare, homogene und gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung.
Gleichung (2) ist eine lineare, inhomogene und gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung.

(b) Die allgemeine Lösung der DGL (1) enthält (DGL 1. Ordnung) einen freien Parameter - sie hat unendliche viele Lösungen.

(c) Die allgemeine Lösung der DGL (2) enthält (DGL 2. Ordnung) zwei freie Parameter - sie hat unendliche viele Lösungen.

(d) Durch die Randbedingung wird einer der beiden freien Parameter festgelegt, es bleiben noch immer unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 7

Bestimmung des Fourier-Koeffizienten b_1 für die 2π-periodische Sägezahnfunktion $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ für $0 \leq x < 2\pi$.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \\
b_1 &= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin(x) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin(x) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\pi}{2} \sin(x) dx - \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{x}{2} \sin(x) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[-\cos(x) \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \left[\sin(x) - x\cos(x) \right]_0^{2\pi} \\
&= -\frac{1}{2\pi}(-2\pi) = 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 8

(8 Punkte)
Die Differenzialgleichung lautet

$$U(t) - RI(t) = U(t) - R(-C\dot{U}(t)) = 0$$

$$\dot{U}(t) + \frac{1}{RC} U(t) = 0$$

a) Lösung durch Separation der Variablen

$$
\begin{aligned}
\frac{dU}{dt} &= -\frac{1}{RC}U(t) \\
\frac{dU}{U} &= -\frac{1}{RC}dt \\
\int \frac{dU}{U} &= -\int \frac{1}{RC}dt \\
U(t) &= C \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} \\
U(0) &= C \cdot e^{0} = C
\end{aligned}
$$

b) Laplace-Transformation der DGL (mit $\mathcal{L}\{U(t)\} = F(s)$):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\dot{U}(t)\} + \frac{1}{RC}\mathcal{L}\{U(t)\} = 0 \\
sF(s) - U(0) + \frac{1}{RC}F(s) = 0 \\
F(s) = U_0 \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}
\end{aligned}
$$

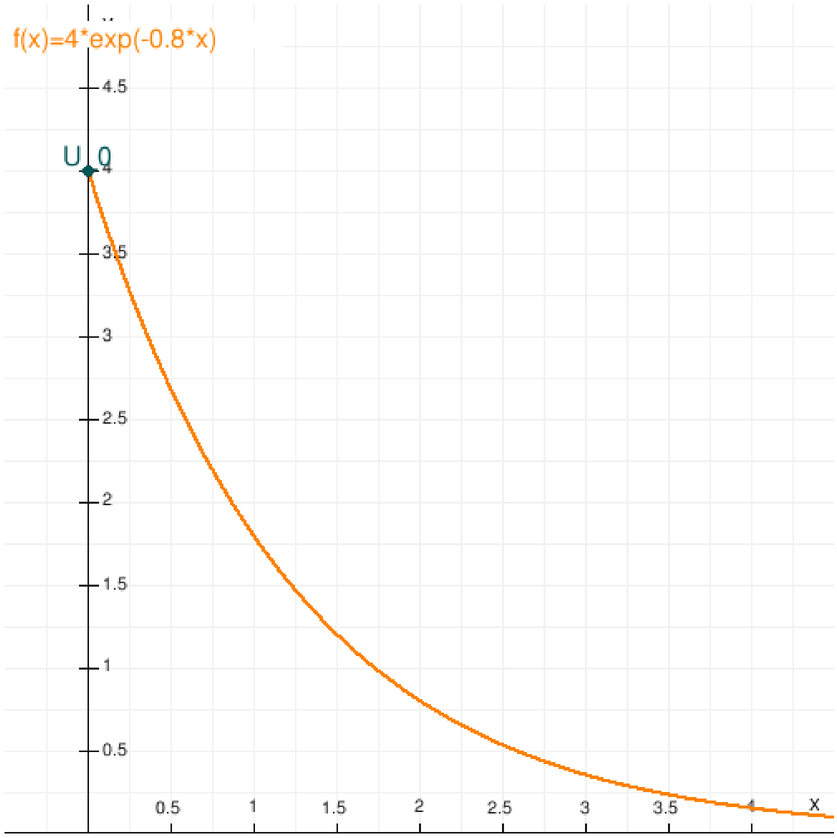
Mit der Korrespondenz

$$
e^{-at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a}
$$

kann sofort zurücktransformiert werden:

$$
U(t) = U_0 \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s + \frac{1}{RC}}\} = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}
$$

c) Graph der Funktion (Verlauf der Spannung) mit $U_0 = 4$ und $1/(RC) = 0.8$:



f(x)=4*exp(-0.8*x)
U_0
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
x