Musterlösung zur Klausur Mathematik 3 TMM16

M. Oettinger 21.12.2017

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 54, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

Integrale (10 Punkte):

(a) Substitution: $u(x) = \cos(x)$:

$$\frac{du}{dx} = -\sin(x) \Rightarrow dx = -\frac{du}{\sin(x)}$$

$$\int \sin(x) e^{-\cos(x)} dx = \int \sin(x) e^{-u} - \frac{du}{\sin(x)} = -\int e^{-u} du$$

$$= -\left(-e^{-u}\right) + C = e^{-u} + C$$

Rücksubstitution:

$$\int \sin(x) e^{-\cos(x)} dx = e^{-\cos(x)} + C$$

(b) Nutzt man aus, dass $\cos(-x) = \cos(x)$:

$$\int_0^\pi (\cos(-x))^2 + (\sin(x))^2 \, dx = \int_0^\pi (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 \, dx$$

und $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, so folgt

$$\int_0^\pi (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 \, dx = \int_0^\pi 1 dx = [x]_0^\pi = \pi$$

(c) Trick: $\ln(x) = 1 \cdot \ln(x)$, partielle Integration mit $u' = 1 \Rightarrow u = x$ und $v = \ln(x) \Rightarrow v' = 1/x$:

$$\int 1 \cdot \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - x + C$$

Aufgabe 2

(7 Punkte)
Doppelintegral des halben Kreisringes (in Polarkoordinaten, weil es sich um einen Bereich mit Rotationssymmetrie handelt) (6 Punkte):

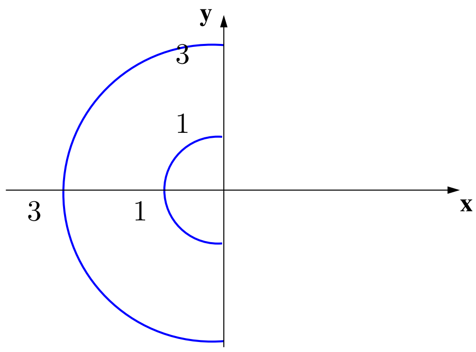

Abbildung 1: Skizze des Bereichs (A)

$$A = \iint\limits_{(A)} x dA; \qquad x \leq 0;\ 1 \leq x^2 + y^2 < 9.$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{(A)} x dA &= \int\limits_{r=1}^{3} \int\limits_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} r\cos(\varphi) r dr d\varphi = \int\limits_{r=1}^{3} \left[\sin(\varphi)\right]_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} r dr \\ &= (-1-1) \int\limits_{r=1}^{3} r^2 dr = (-2)\left[\frac{r^3}{3}\right]_1^3 \\ &= -\frac{52}{3}\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(12 Punkte)
Es handelt sich um eine lineare, inhomogene und gewöhnliche DGL 1.Ordnung. Lösung über Variation der Konstanten: die zugehörige homogene DGL

ist

$$
\begin{aligned}
y_0'(x) + 3\lambda y_0(x) &= 0 \\
\frac{dy_0}{dx} &= -3\lambda y_0 \\
\frac{dy_0}{y_0} &= -3\lambda dx \\
\int \frac{dy_0}{y_0} &= -3\lambda \int dx \\
y_0(x) &= C \cdot e^{-3\lambda x}
\end{aligned}
$$

Lösung der inhomogenen DGL durch Variation der Konstanten:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= C(x) \cdot e^{-3\lambda x} \\
y'(x) &= C'(x) e^{-3\lambda x} - C(x) 3\lambda e^{-3\lambda x}
\end{aligned}
$$

eingesetzt in die DGL

$$
\begin{aligned}
C'(x)e^{-3\lambda x} - C(x)3\lambda e^{-3\lambda x} + C(x)3\lambda e^{-3\lambda x} &= e^{-3\lambda x}\sin(x) \\
C'(x)e^{-3\lambda x} &= e^{-3\lambda x}\sin(x) \\
C'(x) &= \sin(x) \\
C(x) &= \int \sin(x)dx = -\cos(x) + C
\end{aligned}
$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lautet also

$$y(x) = (-\cos(x) + C)e^{-3\lambda x}.$$

Aufgabe 4

(9 Punkte)
Die zugehörige homogene DGL

$$\dot{I}_0 + \frac{R}{L} I_0 = 0$$

wird für beide Verfahren benötigt, sie kann über Trennung der Variablen gelöst werden:

$$
\begin{aligned}
\dot{I}_0 = -\frac{R}{L} I(t) \Leftrightarrow \int \frac{dI_0}{I_0} &= -\int \frac{R}{L} dt \\
\ln |I_0| &= -\frac{R}{L} t + \ln |C| \\
I_0(t) &= C \cdot e^{-\frac{R}{L} t}.
\end{aligned}
$$

Die Lösung der inhomogenen DGL über das Aufsuchen einer partikulären Lösung: der Störterm ist konstant, ein geeigneter Ansatz ist

$$
I_p(t) = A \quad \Rightarrow \dot{I}_p(t) = 0
$$

in die DGL eingesetzt

$$
\begin{aligned}
0 + \frac{R}{L} A &= \frac{U_0}{L} \\
I_p(t) &= A = \frac{U_0}{R} \\
I(t) &= I_0(t) + I_p(t) = \frac{U_0}{R} + C \cdot e^{-\frac{R}{L} t}
\end{aligned}
$$

Die zweite Möglichkeit ist die Variation der Konstanten. Ansatz ist

$$
I(t) = C(t) e^{-\frac{R}{L} t}, \;\; \dot{I}(t) = \dot{C}(t) e^{-\frac{R}{L} t} - \frac{R}{L} C(t) e^{-\frac{R}{L} t}
$$

in die DGL eingesetzt

$$
\begin{aligned}
\dot{C}(t) e^{-\frac{R}{L} t} - \frac{R}{L} C(t) e^{-\frac{R}{L} t} + \frac{R}{L} C(t) e^{-\frac{R}{L} t} &= \frac{U_0}{L} \\
\dot{C}(t) e^{-\frac{R}{L} t} &= \frac{U_0}{L} \\
\dot{C}(t) &= \frac{U_0}{L} \int e^{\frac{R}{L} t} dt \\
C(t) &= \frac{U_0}{L} \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L} t} + C \\
\Rightarrow \; I(t) &= C(t) e^{-\frac{R}{L} t} = \frac{U_0}{R} + C \cdot e^{-\frac{R}{L} t}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5

(6 Punkte)
$f(x) = \pi \cdot \sin(x)$ soll in eine Fourierreihe entwickelt werden:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \pi \cdot \sin(x)dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)dx = 0$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \pi \cdot \sin(x)\cos(nx)dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)\cos(nx)dx = 0$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \pi \cdot \sin(x)\sin(nx)dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)\sin(nx)dx = \begin{cases} \pi & \text{für} \quad n = 1 \\ 0 & \text{für} \quad n \neq 1 \end{cases}$$

Als einziger Term bleibt also $b_1 = \pi$, in die Fourier-Reihe eingesetzt folgt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = b_1 \sin(1 \cdot x) = \pi \cdot \sin(x).$$

Einfacher findet man die Lösung, wenn man ausnutzt, dass der Sinus ungerade ist, es müssen also alle geraden Terme verschwinden ($a_0 = 0, a_n = 0$). Schreibt man die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) + \dots$$

aus, erkennt man über einen einfachen Koeffizientenvergleich sofort, dass $b_1 = \pi$.

Aufgabe 6

(10 Punkte)

$$\ddot{f}(t) + f(t) = 0$$

Laplace-Transformation der Gleichung (mit $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\ddot{f}(t)\} + \mathcal{L}\{f(t)\} &= 0 \\ s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0) + F(s) &= 0 \\ s^2F(s) - 0 - 1 + F(s) &= 0 \\ (s^2+1)F(s) &= 1 \\ F(s) &= \frac{1}{s^2+1} \end{aligned}$$

Rücktransformation liefert mit

$$sin(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2+1}$$

sofort die Lösung des Anfangswertproblems:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\} = 1 \cdot \sin(t)$$